



Heat transfer between a gas and an ultralow thermal conductivity porous structure

J. Pérez^{a,*}, F.R. Villatoro^b, J.L.G. Santander^a, M.A. Borovsky^c, Yu.L. Ratis^d, E.A. Izzheurov^c, P. Fernández de Córdoba^a

^a Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain

^b Dpto. de Lenguajes y Ciencias de la Computación, Universidad de Málaga, Málaga, Spain

^c Aviation Engines, Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolev, Samara, Russia

^d Department of Informatics, Samara State Aerospace University named after Academician S.P. Korolev, Samara, Russia

ARTICLE INFO

Keywords:

Two-phase heat transfer
Ultralow thermal conductivity material
Analytical solution
Laplace transform

ABSTRACT

The analytical solution of a one-dimensional problem of heat transfer between an inert gas and an ultralow thermal conductivity porous medium is obtained by means of the Laplace transform method. The solution shows a sharp heat front propagation through the medium during its heating or cooling depending on its initial temperature.

© 2008 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

The heat transfer between an inert gas and a low thermal conductivity porous material has a large number of technological applications such as in high temperature energy storage packed beds [1], capillary electrochromatography [2], or food engineering [3]. Recent attention has focused to ultralow thermal conductivity nanostructured materials, such as thin films, superlattices, nanowires and nanocomposites [4,5]. Such materials present a thermal conductivity only a few percents larger than that of air, being smaller than the corresponding theoretical lower bound for a solid, referred to as Einstein limit [6].

Analytical solutions for the problem of the heat transfer between a non-reactive gas flow through a porous medium requires strict assumptions but yield great insight into the dynamics of the system. The solution of the full set of nonlinear partial differential equations for this problem under both constant [7] and variable [8] porosity has been obtained by means of numerical methods [9]. The validation of these numerical methods is simplified when a set of simple analytical solutions is known. One of such solutions is known in the case of fully developed flow [10].

In this paper, the analytical solution of the heat transfer between an inert gas and a porous matrix under several hypothesis, presented in Section 2, is obtained in Section 3 by means of the Laplace transform method resulting in definite integrals of Bessel functions. Section 4 shows the results of the numerical evaluation of these expressions. Finally, the last section is devoted to the main conclusions and further research lines.

* Corresponding author.

E-mail address: jperezq@mat.upv.es (J. Pérez).

2. Mathematical model and its assumptions

Let us consider the heat transfer between a gas and a porous solid, long enough to be considered as semi-infinite in extent, under the following assumptions: the gas is an incompressible Newtonian fluid, with negligible viscous dissipation, negligible heat conduction among the fluid particles, and the fluid motion is only in the axial direction of the solid, from the inlet to the outlet, in quasi-steady conditions; the solid has a constant porosity and negligible radial temperature gradient, with only an axial temperature gradient. This two-phase problem is modelled through the system of coupled partial differential equations [11]

$$p\rho_f c_f \left(\frac{\partial T_f}{\partial t} + v_f \frac{\partial T_f}{\partial x} \right) = -h(T_f - T_s), \quad (1)$$

$$(1-p)\rho_s c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = h(T_f - T_s) + (1-p)\lambda_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2}, \quad (2)$$

where x is the axial position along the medium, t is time, the subscripts f and s stand for the fluid and the solid matrix, respectively, T is the temperature, ρ is the density, c_s is the specific heat of the solid, c_f is the specific heat at constant pressure of the fluid, v_f is the fluid flow velocity, h is the heat transfer coefficient between the fluid and the solid, λ_s is the thermal conductivity, and p is the effective porosity. Here on, for an ultralow thermal conductivity solid, $\lambda_s = 0$.

Let us assume, as initial condition, that both phases start in thermal equilibrium, i.e., with the same temperature equal to the ambient one (T_{c_0}),

$$T_f(0, x) = T_{c_0}, \quad x > 0, \quad (3)$$

$$T_s(0, x) = T_{c_0}, \quad x > 0. \quad (4)$$

Let us also assume that the fluid is injected in the solid matrix at $x = 0$, with constant flow velocity (v_f) and temperature,

$$T_f(t, 0) = T_{r_0}, \quad t > 0. \quad (5)$$

Eqs. (1)–(5) may be nondimensionalized by introducing the following variables

$$\tau = \frac{ht}{(1-p)\rho_s c_s}, \quad y = \frac{nhx}{p\rho_f c_f v_f}, \quad n = \frac{p\rho_f c_f}{(1-p)\rho_s c_s}, \quad (6)$$

defining $\chi(\tau, y)$ and $\varepsilon(\tau, y)$ as

$$T_s = T_{c_0} + \chi(\tau, y)(T_{r_0} - T_{c_0}), \quad (7)$$

$$T_f = T_{c_0} + \varepsilon(\tau, y)(T_{r_0} - T_{c_0}), \quad (8)$$

resulting in the dimensionless problem

$$n \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) = \chi - \varepsilon, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tau} = \varepsilon - \chi, \quad (10)$$

with initial conditions

$$\varepsilon(0, y) = 0, \quad \chi(0, y) = 0, \quad y > 0, \quad (11)$$

and boundary condition

$$\varepsilon(\tau, 0) = 1, \quad \tau > 0. \quad (12)$$

3. Analytical solution by the Laplace transform method

The initial-boundary-value problem in the quarterplane given by Eqs. (19)–(23) can be solved by the Laplace transform method, yielding

$$n \left(s\hat{\varepsilon}(s, y) + \frac{\partial \hat{\varepsilon}(s, y)}{\partial y} \right) = \hat{\chi}(s, y) - \hat{\varepsilon}(s, y), \quad (13)$$

$$s\hat{\chi}(s, y) = \hat{\varepsilon}(s, y) - \hat{\chi}(s, y), \quad (14)$$

$$\hat{\varepsilon}(s, 0) = \frac{1}{s}, \quad (15)$$

where $\hat{\varepsilon}(s, y)$ and $\hat{\chi}(s, y)$ are the Laplace transform in τ of the functions $\varepsilon(\tau, y)$ and $\chi(\tau, y)$, respectively.

The solution of the Eqs. (13)–(15) is

$$\hat{\varepsilon}(s, y) = \tilde{\varepsilon}(s, y)e^{-ys}, \quad \tilde{\varepsilon}(s, y) = \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{sy}{n(s+1)}\right) \tag{16}$$

$$\hat{\chi}(s, y) = \tilde{\chi}(s, y)e^{-ys} \quad \tilde{\chi}(s, y) = \frac{1}{s(s+1)} \exp\left(-\frac{sy}{n(s+1)}\right). \tag{17}$$

The application of the shift time property of the inverse Laplace transform [12], i.e., $\mathcal{L}^{-1}(e^{-ys}F(s)) = H(\tau - y)f(\tau - y)$, with $\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(\tau)$, where $H(u)$ is Heaviside's unit step function, and the use of the Bromwich integral inversion of Eqs. (16) and (17) yield

$$\varepsilon(\tau, y) = \frac{H(\tau - y)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{\varepsilon}(s, y)e^{s(\tau-y)} ds, \tag{18}$$

$$\chi(\tau, y) = \frac{H(\tau - y)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{\chi}(s, y)e^{s(\tau-y)} ds, \tag{19}$$

where $i = \sqrt{-1}$, and $c > \text{Re}(s) > 0$, for the singularities s of the integrands in Eqs. (16) and (17), i.e., $s \in \{0, -1\}$.

Note that the condition $\tau < y$, for which $\varepsilon(\tau, y) = 0$, and $\chi(\tau, y) = 0$ in Eqs. (18) and (19), according to Eqs. (6) and (12), implies that

$$\frac{ht}{(1-p)\rho_s c_s} < \frac{nhx}{p\rho_f c_f v_f} = \frac{hx}{(1-p)\rho_s c_s v_f}, \tag{20}$$

i.e., $v_f t < x$, indicating that the temperatures of the fluid and of the porous medium in those points y where the convection front has not arrived yet are both equal to the ambient temperature.

The complex integrals Eqs. (18) and (19) can be calculated by applying the theorem of residues [13, p. 212]. Let us consider the simple closed contour C shown in Fig. 1. Since $\tilde{\varepsilon}(s, y)$ is a meromorphic function, then

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{\varepsilon}(s, y)e^{s(\tau-y)} ds = \int_C \tilde{\varepsilon}(s, y)e^{s(\tau-y)} ds - \kappa(\varepsilon), \tag{21}$$

where

$$\kappa(\varepsilon) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \tilde{\varepsilon}(s, y)e^{s(\tau-y)} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\exp(\omega)}{s} ds,$$

$$\text{Re}(\omega) = \text{Re}\left(s(\tau - y) - \frac{sy}{n(s+1)}\right).$$

It can be easily proved that $\kappa(\varepsilon) = 0$. In fact, in the curve C_R , $s = R e^{i\theta}$, $ds/s = d\theta$, $\theta \in [\pi/2 - \alpha(R), 3\pi/2 + \alpha(R)]$, with $\alpha(R)$ as defined in Fig. 1 such that

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \alpha(R) = 0.$$

Moreover, in the curve C_R ,

$$\text{Re}(\omega) = (\tau - y)R \cos \theta - \frac{y}{n} \frac{R^2 + R \cos \theta}{R^2 + 2R \cos \theta + 1}. \tag{22}$$

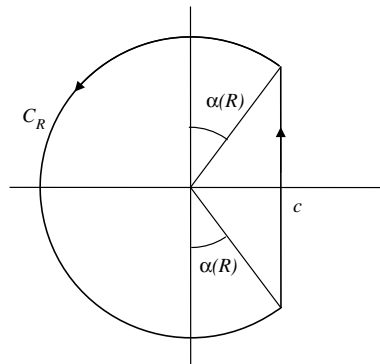


Fig. 1. Contour of integration for the Bromwich inversion formula used in Eqs. (18) and (19).

For $\tau > y$, the expression $|\exp(\omega)| \leq \exp(\operatorname{Re}(\omega))$, implies that

$$|\kappa(\varepsilon)| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\frac{\pi}{2} - \alpha(R)}^{\frac{3\pi}{2} + \alpha(R)} \exp(\operatorname{Re}(\omega)) d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \lim_{R \rightarrow \infty} \exp(\operatorname{Re}(\omega)) d\theta = 0, \quad (23)$$

where it has been taken into account that $\cos \theta < 0$, for $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$, and

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \exp(\operatorname{Re}(\omega)) = 0.$$

Recalling that the generating function of the modified Bessel functions I_k is given by [14, p. 376]

$$\exp\left(\frac{z}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k I_k(z), \quad (24)$$

the exponential function in the integrand of Eq. (18) may be written as

$$\begin{aligned} e^w &= \exp\left((s+1-1)(\tau-y) - \frac{(s+1-1)y}{n(s+1)}\right) = \exp\left(y - \tau - \frac{y}{n}\right) \exp\left((s+1)(\tau-y) + \frac{y}{n(s+1)}\right) \\ &= \exp\left(y - \tau - \frac{y}{n}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k I_k(z), \end{aligned} \quad (25)$$

where

$$z = 2\sqrt{\frac{(\tau-y)y}{n}}, \quad t = \frac{s+1}{g}, \quad g = \sqrt{\frac{y}{n(\tau-y)}}. \quad (26)$$

Substituting Eq. (25) into Eq. (18) yields

$$\varepsilon(\tau, y) = \frac{1}{2\pi i} H(\tau-y) e^{y-\tau-y/n} \int_C \frac{1}{s} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k I_k(z) \right) ds, \quad (27)$$

where $1/s = 1/(gt-1)$ can be expanded in a convergent power series, since $|gt| = |s+1| > 1$, resulting in

$$\varepsilon(\tau, y) = \frac{H(\tau-y)}{2\pi i} e^{y-\tau-y/n} \int_C \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(gt)^{m+1}} \right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k I_k(z) \right) g dt. \quad (28)$$

The integrand in Eq. (28) can be simplified by application of residue theory [13, p. 212] and the Laurent series

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t^{k-(m+1)} I_k(z) \right) dt = I_m(z), \quad (29)$$

finally yielding

$$\varepsilon(\tau, y) = H(\tau-y) e^{y-\tau-y/n} \sum_{m=0}^{\infty} g^{-m} I_m(z). \quad (30)$$

The same procedure can be applied in order to evaluate the complex integral Eq. (19), which is equal to

$$\int_{C-i\infty}^{C+i\infty} \tilde{\chi}(s, y) e^{s(\tau-y)} ds = \int_C \tilde{\chi}(s, y) e^{s(\tau-y)} ds, \quad (31)$$

where C is the simple closed contour shown in Fig. 1, since

$$\kappa(\chi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \tilde{\chi}(s, y) e^{s(\tau-y)} ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\exp(\omega)}{s(s+1)} ds = 0, \quad (32)$$

where ω is given by Eq. (22), and in fact,

$$|\kappa(\chi)| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(R \cos(\theta)(\tau-y) - \frac{Ry(R+\cos(\theta))}{n(R^2+2R\cos(\theta)+1)}\right)}{\sqrt{R^2+2R\cos(\theta)+1}} d\theta = 0, \quad (33)$$

for $\tau - y > 0$. Substituting Eq. (25) into Eq. (31) yields

$$\chi(\tau, y) = H(\tau-y) e^{y-\tau-y/n} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{s(s+1)} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k I_k(z) \right) ds. \quad (34)$$

Taking into account that $(s + 1)^{-1}$ is equal to $(gt)^{-1}$, Eq. (34) results in

$$\chi(\tau, y) = H(\tau - y)e^{y-\tau-y/n} \sum_{m=1}^{\infty} g^{-m} I_m(z). \tag{35}$$

The numerical evaluation of the infinite series representations of ϵ and χ in Eqs. (30) and (35), respectively, may be simplified if a definite integral representation is obtained. Substraction of Eqs. (30) and (35) yields

$$\epsilon(\tau, y) - \chi(\tau, y) = H(\tau - y)e^{y-\tau-y/n} I_0\left(2\sqrt{\frac{(\tau - y)y}{n}}\right), \tag{36}$$

which may be substituted into Eq. (10) and integrated giving

$$\chi(\tau, y) = e^{y-y/n} \int_y^{\tau} e^{-\tau'} I_0\left(2\sqrt{\frac{y(\tau' - y)}{n}}\right) H(\tau' - y) d\tau', \tag{37}$$

where the change of variables $u = \tau' - y$, results in

$$\chi(\tau, y) = H(\tau - y)e^{-y/n} \int_0^{\tau-y} e^{-u} I_0\left(2\sqrt{\frac{yu}{n}}\right) du. \tag{38}$$

The application of Leibniz formula for the differentiation under the integral sign [15, p. 23] to Eq. (38) and the use of Eq. (10) yields

$$\epsilon = \frac{\partial \chi}{\partial \tau} + \chi = H(\tau - y)e^{-y/n} \left\{ e^{-\tau+y} I_0\left(2\sqrt{\frac{y(\tau - y)}{n}}\right) + \int_0^{\tau-y} e^{-u} I_0\left(2\sqrt{\frac{yu}{n}}\right) du \right\}. \tag{39}$$

Integration by parts of Eq. (39), and recalling that $I'_0(z) = I_1(z)$, and $I(0) = 1$, results in

$$\epsilon(\tau, y) = H(\tau - y)e^{-y/n} \left\{ 1 + \int_0^{\tau-y} e^{-u} I_1\left(2\sqrt{\frac{yu}{n}}\right) \sqrt{\frac{y}{un}} du \right\}. \tag{40}$$

4. Presentation of results

The main results of this paper are the nondimensional solutions (38) and (40), which depend only on the parameter n , cf. $(p\rho_f c_f)/((1-p)\rho_s c_s)$. Recall that the effective porosity p is the fraction of the bulk volume of the porous medium that is occupied by void space, assumed to be connected, thus $(1-p)$ is the fraction that is occupied by the solid. The term $p\rho_f c_f$ is the amount of heat required to raise the temperature of the fluid filling the void space by one degree Celsius and $(1-p)\rho_s c_s$ is the amount required for the solid. Therefore, $n > 1$ implies that a larger amount of heat is required to raise the fluid temperature than the solid one, and $n < 1$ the converse. In other words, a fixed amount of heat in a reference volume of the medium results in a larger (smaller) increase of the temperature of the solid than that of the fluid for $n > 1$ ($n < 1$).

Eqs. (38) and (40) may be evaluated by means of any numerical quadrature rule; here, adaptive Gauss–Kronrod quadrature [16, p. 154] has been used. Fig. 2a and b show the solution $\epsilon(\tau, y)$ for, respectively, $n = 0.5$ and $n = 5.0$ at times $\tau = 1, 2, \dots, 9$, where, for identification, each curve has been marked with its corresponding value of τ . The same applies to the solution $\chi(\tau, y)$ in Fig. 3a and b. Since Eqs. (38) and (40) are transport equations modelling the heat convection through the medium, the boundary condition at $y = 0$ generates a temperature wavefront propagating at constant velocity, equal to unity in nondimensional units. Figs. 2 and 3 show snapshots of the heat wave propagating from the left to the right presenting a sharp front at position $y = \tau$ due to the Heaviside function in Eqs. (38) and (40), corresponding to the heating of the solid by the gas, i.e., $T_{c_0} < T_{r_0}$. Using Eq. (7), the cooling process for $T_{c_0} > T_{r_0}$, may also be easily analyzed.

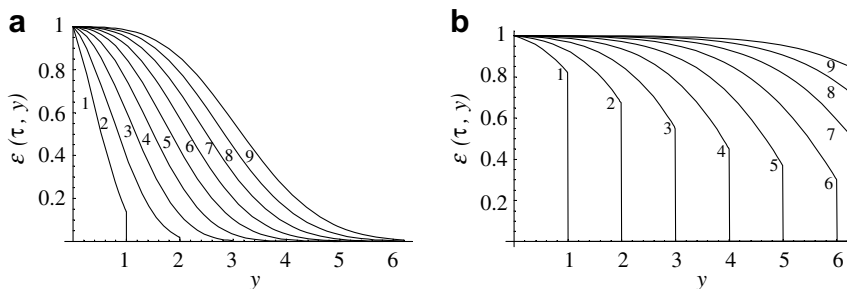


Fig. 2. Evolution in time of the function $\epsilon(\tau, y)$ for $n = 0.5$ (a) and $n = 5.0$ (b) at times $\tau = 1, 2, \dots, 9$, with the value of τ behinds the corresponding curve.

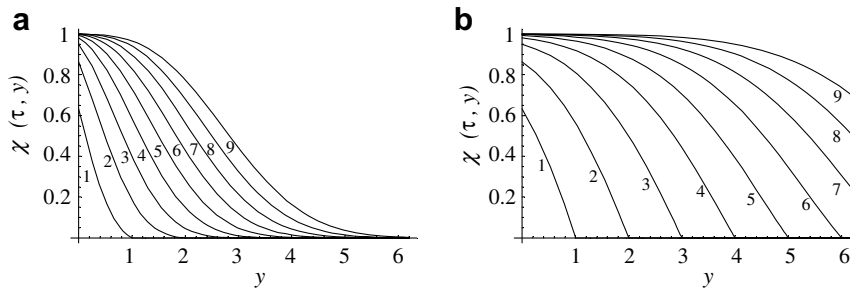


Fig. 3. Evolution in time of the function $\chi(\tau, y)$ for $n = 0.5$ (a) and $n = 5.0$ (b) at times $\tau = 1, 2, \dots, 9$, with the value of τ behinds the corresponding curve.

Fig. 2b shows that the nondimensional temperature of the gas for $n = 5$ presents a sharp discontinuous front propagating at unit speed. The spatial derivative of the temperature is not continuous at the heating front position ($y = \tau$). The size of this discontinuity decreases as time evolves, until reaching a null value. For $n = 5$, the gas temperature decrease slowly as the wavefront propagates, but the heat exchanged with the solid yields a fast increase in its temperature, shown in Fig. 3b. Figs. 2a and 3a, show the temperature profiles for the gas and solid, respectively, for $n = 0.5$, corresponding to a situation in which the gas (solid) decreases (increases) its temperature faster (slower) than for $n = 5$. Fig. 2a shows that the height of the gas front decreases fast, resulting in a temperature profile more smooth and similar to that of a diffusive equation. Similarly, Fig. 3a shows that the profile of the solid temperature also resembles that of a diffusive front, showing a spatial derivative rapidly approaching to zero. The temperature of the porous medium at the inlet increases until reaching that of the incoming gas flow, equal to unity in nondimensional variables.

5. Conclusions

The analytical solution of the problem of heat transfer between an inert gas and a ultralow thermal conductivity porous solid has been obtained under the assumptions that the gas is an incompressible Newtonian fluid, with negligible viscous dissipation, negligible heat conduction among the fluid particles, and the fluid motion is only in the axial direction of the solid, from the inlet to the outlet, in quasi-steady conditions, and also that the solid has a constant porosity and negligible radial temperature gradient. The solution has been obtained by means of using the Laplace transform method, resulting in definite integrals of expression involving modified Bessel functions which can be numerically evaluated by means of Gauss–Kronrod quadrature rules very efficiently. Plots showing the evolution of the profiles of the temperatures of the gas and solid matrix have been illustrated.

The sharp front shown in the analytical solution presented in this paper is difficult to detect and quantify by numerical methods. Thus, our solution can be used to validate numerical schemes for heat transfer between fluids and porous media with negligible or non-negligible thermal conductivity.

The extension of our analytical solution to multiphase problems with more than two phases is currently in progress. Moreover, since present results neglect the thermal conductivity of the porous medium, which may be important for low thermal conductivity materials after the thermal front height decreases to zero. The application of perturbation techniques to handle the effects of small values of thermal conductivity is also in progress.

Acknowledgements

The authors thanks an anonymous reviewer for his useful suggestions. This work has been funded by Projects FIS2005-03191 and FIS2005-01189 from the Spanish Ministry of Education and Science.

References

- [1] J.S. Andrepont, Thermal energy storage: solutions for demand management, *Energy Eng.* 100 (2003) 66–80.
- [2] I. Nischang, U. Tallarek, Fluid dynamics in capillary and chip electrochromatography, *Electrophoresis* 28 (2007) 611–626.
- [3] A.E. Kostaropoulos, G.D. Saravacos, Thermal diffusivity of granular and porous foods at low moisture content, *J. Food Eng.* 33 (1997) 101–109.
- [4] R. Prasher, Ultralow thermal conductivity of a packed bed of crystalline nanoparticles: a theoretical study, *Phys. Rev. B* 74 (2006) 165413.
- [5] C. Chiritescu, D.G. Cahill, N. Nguyen, D. Johnson, A. Bodapati, P. Keblinski, P. Zschack, Ultralow thermal conductivity in disordered, layered WSe_2 crystals, *Science* 315 (2007) 351–353.
- [6] D.G. Cahill, S.K. Watson, R.O. Pohl, Lower limit to the thermal conductivity of disordered crystals, *Phys. Rev. B* 46 (1992) 6131–6140.
- [7] M. Awartani, M.H. Hamdan, Non-reactive gas-particulate models of flow through porous media, *Appl. Math. Comput.* 100 (1999) 93–102.
- [8] F.M. Allan, N. Qatanani, I. Barghouthi, K.M. Takatka, Dusty gas model of flow through naturally occurring porous media, *Appl. Math. Comput.* 148 (2004) 809–821.
- [9] H. Siyyam, N. Merabet, M.H. Hamdan, Standard numerical schemes for coupled parallel flow over porous layers, *Appl. Math. Comput.* 194 (2007) 38–45.
- [10] M.M. Awartani, M.H. Hamdan, Fully developed flow through a porous channel bounded by flat plates, *Appl. Math. Comput.* 169 (2005) 749–757.
- [11] D.A. Nield, A. Bejan, *Convection in Porous Media*, Springer, New York, 1999.

- [12] G.B. Folland, *Fourier Analysis and its Applications*, Brooks/Cole Publishing, Pacific Grove, CA, 1992.
- [13] M.Ya. Antimirov, A.A. Kolyshkin, R. Vaillancourt, *Complex Variables*, Academic Press, San Diego, CA, 1998.
- [14] N.N. Lebedev, *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications, New York, 1972.
- [15] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, fifth ed., Academic Press, London, 1994.
- [16] W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing*, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, England, 1992.

Mathematical modelling and analytical solution for workpiece temperature in grinding

D.L. Skuratov ^a, Yu.L. Ratis ^a, I.A. Selezneva ^a, J. Pérez ^{b,*},
P. Fernández de Córdoba ^b, J.F. Urchueguía ^c

^a Samara State Aerospace University, Russia

^b Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, Spain

^c Dpto. de Física Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, Spain

Received 1 June 2005; received in revised form 1 December 2005; accepted 16 March 2006

Available online 12 June 2006

Abstract

This paper deals with modelling the workpiece temperature field produced during the grinding process. The proposed model is given in terms of a two-dimensional boundary-value problem where the interdependence among the grinding wheel, the workpiece and the coolant is described by two variable functions in the boundary condition. An explicit integral form solution is constructed using the Laplace and Fourier transforms and the Green's function method.

© 2006 Elsevier Inc. All rights reserved.

Keywords: Grinding; Modelling; Variable coefficient boundary-value PDE problem; Exact solution; Integral transforms; Green's function method

1. Introduction

Designing technological processes such as grinding finishing operations entails to deal with the heating problem of the piece being ground. During grinding, most of the mechanical energy is transformed into heat, which is accumulated in the contact zone between the grinding device and the workpiece. The high temperatures reached may cause thermal damage to the workpiece. Therefore, it is of a considerable industrial interest to understand the heat generation and conduction in order to minimize energy losses and increase the efficiency of subsequent processing.

Fig. 1 illustrates the physical setup under consideration. A large portion of a body, called the workpiece, moves at a constant velocity v_d and gets in contact with a rotating grinding wheel.

It is assumed that both the wheel and the workpiece are rigid. A fluid flows between the wheel and the workpiece lubricating and cooling the contact surface and removing the ground material. The larger region

* Corresponding author. Tel.: +34 963877660 (76648); fax: +34 963877669.
E-mail address: jperezq@mat.upv.es (J. Pérez).

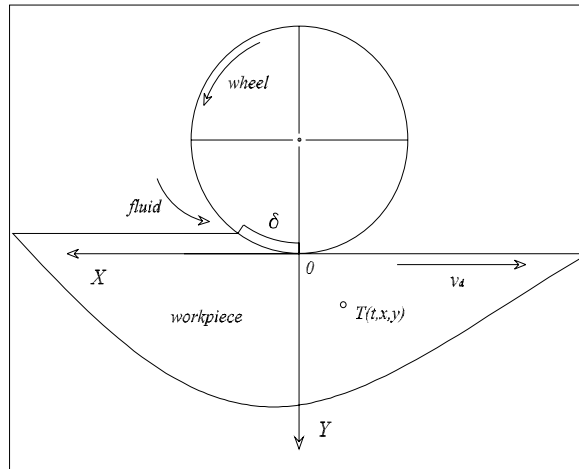


Fig. 1. Grinding setting.

over which the grinding wheel contacts the workpiece is due to the curvature of the wheel. This region is assumed to be of length $\delta > 0$ and remains constant with time.

Classical modelling of the grinding problem use coupled systems of partial differential equations (PDE) [1,2] to calculate the evolution of the interconnected temperature fields in the wheel, the workpiece and the fluid. In this paper, a simplified mathematical model to study the thermal effects on the workpiece is presented. Instead of solving the coupled system of PDEs, a solution is found for a boundary-value problem with variable boundary data. The influence of the wheel and the fluid is included into the boundary condition of the problem.

Most of the literature on thermal aspects of grinding deals with experimental and numerical analysis, see, e.g., [3–5] among others. Nevertheless, explicit solutions of PDE problems have noticeable advantages over numerical solutions, such as the possibility to check the correctness of the model and to study the variation of the solution with the data. Thus, unlike with the widely used numerical methods, an exact, closed form solution for the workpiece background temperature is obtained. Recent works in the field attempt to find exact solutions for the temperature in the workpiece surface only [6]. In this paper, we obtain a temperature distribution throughout the whole of the workpiece.

The organization of the paper is as follows. Section 2 is concerned with the physical setting and the mathematical problem, stated in abstract terms. In Section 3, a boundary-value problem with variable boundary data is solved. The Laplace and Fourier transforms are used to find an explicit solution in integral form. Section 4 deals with the modelling and explicit solution of a real problem where an intermittent grinding wheel contacts the cutting zone at regular time intervals. More than forty years ago, the introduction of titanium alloys over steels in Russian aircraft engine building began to be quite popular. The advantages of these alloys in terms of corrosion resistance are well-known for the main companies in the sector, see for instance [7]. Section 5 describes some numerical simulations for the intermittent grinding of a titanium alloy VT20 [8] workpiece. These are obtained by numerical integration of the analytical expressions.

Throughout this paper \mathcal{L} denotes the Laplace transform and \mathcal{F} the Fourier transform [9].

2. Mathematical model

The two-dimensional setting depicted in Fig. 1 is assumed in this section. A mathematical model for heat transfer within this framework involves the solution of a convection–diffusion equation

$$\partial_t T(t, x, y) = a(\partial_{xx} T(t, x, y) + \partial_{yy} T(t, x, y)) - v_d \partial_x T(t, x, y), \quad (1)$$

where $T(t, x, y)$ is the workpiece field temperature, a is the thermal diffusivity coefficient and v_d is the feed speed of the workpiece. As a requirement of the model the heat conduction occurs in the half-plane $-\infty < x < +\infty$, $y \geq 0$ for $t \geq 0$.

This paper deals with the mixed problems described by Eq. (1) together with the convective boundary condition

$$\lambda \partial_y T(t, x, 0) = b(t, x)(T(t, x, 0) - T_\infty) + d(t, x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

describing heat transfer in the grinding zone with thermal conductivity λ , and allowing heat to dissipate into the ambient air which is at temperature T_∞ , with heat exchange coefficient $b(t, x)$. The functions $b(t, x)$ and $d(t, x)$ are to be determined experimentally or by some approximation in each specific setting. The initial condition of the problem is described by

$$T(0, x, y) = T_0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0. \tag{3}$$

Assuming that the initial temperature T_0 is equivalent to the ambient temperature T_∞ [2] and considering the change of variables $T = T - T_0$, one gets a new problem for Eq. (1) with boundary condition

$$\lambda \partial_y T(t, x, 0) = b(t, x)T(t, x, 0) + d(t, x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

and initial condition

$$T(0, x, y) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y \geq 0. \tag{5}$$

3. Explicit integral solution

Let $T_v(t, x)$ denote the Laplace transform \mathcal{L} of the function

$$T(t, x, \cdot)(y) = T(t, x, y), \tag{6}$$

$$T_v(t, x) = \mathcal{L}[T(t, x, \cdot)](v) = \int_0^{+\infty} T(t, x, y)e^{-vy} dy. \tag{7}$$

By applying the Laplace transform to Eq. (1) and taking into account the initial condition (5) and the properties of this transform, one obtains the problem

$$\partial_t T_v(t, x) = a(\partial_{xx} T_v(t, x) + v^2 T_v(t, x) - vT(t, x, 0) - \partial_y T(t, x, 0)) - v_d \partial_x T_v(t, x), \tag{8}$$

$$T_v(0, x) = 0. \tag{9}$$

The Green’s functions method [10] allows one to find a solution for problem (8) and (9). In order to obtain it, Eq. (8) is rewritten as follows:

$$\begin{aligned} \partial_t T_v(t, x) - a(\partial_{xx} T_v(t, x) + v^2 T_v(t, x)) + v_d \partial_x T_v(t, x) &= -a(vT(t, x, 0) + \partial_y T(t, x, 0)) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') F_v(t, x') dx', \end{aligned} \tag{10}$$

where $\delta(x - x')$ is the Dirac delta distribution centered at x , and

$$F_v(t, x) = -a(vT(t, x, 0) + \partial_y T(t, x, 0)). \tag{11}$$

Substituting the boundary condition (4) into relation (11), one gets

$$F_v(t, x) = -a[(v + \lambda^{-1}b(t, x))T(t, x, 0) + \lambda^{-1}d(t, x)]. \tag{12}$$

Let $T_{v,\tau}(x)$ be the Laplace transform \mathcal{L} of the function

$$T_v(\cdot, x)(t) = T_v(t, x), \tag{13}$$

$$T_{v,\tau}(x) = \mathcal{L}[T_v(\cdot, x)](\tau) = \int_0^{+\infty} T_v(t, x)e^{-\tau t} dt. \tag{14}$$

By applying the Laplace transform \mathcal{L} to Eq. (10) and taking into account the initial condition (9), one obtains the ODE

$$\tau T_{v,\tau}(x) - a(\partial_{xx} T_{v,\tau}(x) + v^2 T_{v,\tau}(x)) + v_d \partial_x T_{v,\tau}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x') F_{v,\tau}(x') dx', \tag{15}$$

where

$$F_{v,\tau}(x) = \mathcal{L}[F_v(\cdot, x)](\tau) = \int_0^{+\infty} F_v(t, x)e^{-\tau t} dt. \tag{16}$$

Let $G_{v,\tau}(x, x')$ be the fundamental solution of Eq. (15), then $G_{v,\tau}(x, x')$ satisfies

$$\tau G_{v,\tau}(x, x') - a(\partial_{xx} G_{v,\tau}(x, x') + v^2 G_{v,\tau}(x, x')) + v_d \partial_x G_{v,\tau}(x, x') = \delta(x - x'). \tag{17}$$

Regarding $G_{v,\tau}(x, x')$ as function of x and using the properties of the Fourier transform \mathcal{F} , by applying it to Eq. (17), one finds,

$$\tau G_{v,\tau,\chi}(x') - a(-\chi^2 G_{v,\tau,\chi}(x') + v^2 G_{v,\tau,\chi}(x')) - i\chi v_d G_{v,\tau,\chi}(x') = e^{i\chi x'}, \tag{18}$$

where

$$G_{v,\tau,\chi}(x') = \mathcal{F}[G_{v,\tau}(\cdot, x')](\chi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{v,\tau}(x, x')e^{i\chi x} dx. \tag{19}$$

Solving Eq. (18) it follows that

$$G_{v,\tau,\chi}(x') = \frac{e^{i\chi x'}}{\tau + a(\chi^2 - v^2) - i\chi v_d}. \tag{20}$$

By applying the inversion theorem for the Fourier transform [9] to (20) the solution of Eq. (17) is obtained,

$$\begin{aligned} G_{v,\tau}(x, x') &= \mathcal{F}^{-1}[G_{v,\tau,\chi}(x')](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{i\chi x'}}{\tau + a(\chi^2 - v^2) - i\chi v_d} \right) e^{-i\chi x} d\chi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\chi(x'-x)}}{\tau + a(\chi^2 - v^2) - i\chi v_d} d\chi. \end{aligned} \tag{21}$$

By the Green's function method, one gets the solution of Eq. (15)

$$T_{v,\tau}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{v,\tau}(x, x') F_{v,\tau}(x') dx', \tag{22}$$

in terms of $G_{v,\tau}$ expressed by (21) and the function $F_{v,\tau}$ in (16). By applying the inversion theorem for the Laplace transform [9] to (22), and taking into account (14) and (21), the solution of Eq. (10) is

$$\begin{aligned} T_v(t, x) &= \mathcal{L}^{-1}[T_{v,\tau}(x)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{v,\tau}(x) e^{\tau t} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F_{v,\tau}(x') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\chi(x'-x)} d\chi}{\tau + a(\chi^2 - v^2) - i\chi v_d} \right) dx' \right] e^{\tau t} d\tau. \end{aligned} \tag{23}$$

Fubini's theorem allows to rewrite (23) in the form

$$T_v(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\chi x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi x'} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F_{v,\tau}(x') e^{\tau t} d\tau}{\tau + a(\chi^2 - v^2) - i\chi v_d} \right) dx' \right] d\chi. \tag{24}$$

Let

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F_{v,\tau}(x') e^{\tau t} d\tau}{\tau + a(\chi^2 - v^2) - i\chi v_d}, \tag{25}$$

which is the inverse Laplace transform of the product of $F_{v,\tau}$ and function $(\tau + a(\chi^2 - v^2) - i\chi v_d)^{-1}$. Taking into account the definition of $F_{v,\tau}$ given by (16) and the property $\mathcal{L}[\mathbf{1}](z) = z^{-1}$, for the constant function $\mathbf{1}(t) = 1$, the convolution theorem for the Laplace transform [9] can be applied to (25) leading to

$$\Psi(t) = \int_0^t F_v(t - s, x') e^{-(a(\chi^2 - v^2) - i\chi v_d)s} ds. \tag{26}$$

Thus, (24) is transformed into

$$T_v(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\chi x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi x'} \left(\int_0^t F_v(t-s, x') e^{-\{a(\chi^2 - v^2) - i\chi v_d\}s} ds \right) dx' \right] d\chi. \tag{27}$$

By applying the inversion theorem of the Laplace transform to (27) and taking into account (7), it follows that

$$\begin{aligned} T(t, x, y) &= \mathcal{L}^{-1}[T_v(t, x)](y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (T_v(t, x)) e^{vy} dv \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{vy} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\chi x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi x'} \left(\int_0^t F_v(t-s, x') e^{-\{a(\chi^2 - v^2) - i\chi v_d\}s} ds \right) dx' \right] d\chi \right\} dv. \end{aligned} \tag{28}$$

Fubini's theorem leads to

$$T(t, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x'-x-v_d s)i\chi - a\chi^2 s} d\chi \right) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_v(t-s, x') e^{av^2 s} e^{vy} dv \right) \right] dx' \right\} ds, \tag{29}$$

where

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(x'-x-v_d s)i\chi - a\chi^2 s} d\chi = \mathcal{F}[e^{-as(\cdot)^2}](x' - x - v_d s) = e^{-\frac{(x'-x-v_d s)^2}{4as}} \sqrt{\frac{\pi}{as}}, \tag{30}$$

and, by the inversion theorem of the Laplace transform and (12),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_v(t-s, x') e^{av^2 s} e^{vy} dv &= \mathcal{L}^{-1}[F_v(t-s, x') e^{av^2 s}](y) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (-avT(t-s, x', 0) - a\lambda^{-1}b(t-s, x')T(t-s, x', 0) \\ &\quad - a\lambda^{-1}d(t-s, x')) e^{av^2 s} e^{vy} dv \\ &= A(t, s, x', y) + B(t, s, x', y), \end{aligned} \tag{31}$$

where

$$A(t, s, x', y) = -\frac{aT(t-s, x', 0)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} v e^{av^2 s} e^{vy} dv = -aT(t-s, x', 0) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{av^2 s} (\partial_y e^{vy}) dv \right], \tag{32}$$

and

$$B(t, s, x', y) = -a\lambda^{-1}(b(t-s, x')T(t-s, x', 0) + d(t-s, x')) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{av^2 s} e^{vy} dv \right). \tag{33}$$

The differentiation theorem of parametric integrals applied to (32) yields

$$A(t, s, x', y) = -aT(t-s, x', 0) \left[\frac{1}{2\pi i} \partial_y \left(\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{av^2 s} e^{vy} dv \right) \right], \tag{34}$$

whereas the substitution $v = i\xi$ into the improper integral appearing in (34) gives

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{av^2 s} e^{vy} dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\xi^2 s} e^{i\xi y} d\xi = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \left[e^{-\frac{2as(\cdot)^2}{2}} \right](y) = \frac{e^{-\frac{y^2}{4as}}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{as}}, \tag{35}$$

thus (34) becomes

$$A(t, s, x', y) = aT(t-s, x', 0) \left(\frac{y}{2as} \right) \left(\frac{e^{-\frac{y^2}{4as}}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{as}} \right), \tag{36}$$

and for (33)

$$B(t, s, x', y) = -a\lambda^{-1}(b(t-s, x')T(t-s, x', 0) + d(t-s, x')) \left(\frac{e^{-\frac{y^2}{4as}}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{as}} \right). \tag{37}$$

Therefore, replacing relations (36) and (37) into (31) and taking into account expression (30), one can write (29) in the form

$$T(t, x, y) = \frac{1}{4\pi} \times \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{4as}} \left(\frac{e^{-\frac{(x'-x-r_0s)^2}{4as}}}{s} \right) \left(\left[\left(\frac{y}{2as} - \frac{b(t-s, x')}{\lambda} \right) T(t-s, x', 0) - \frac{d(t-s, x')}{\lambda} \right] \right) dx' \right] ds, \tag{38}$$

whence

$$T(t, x, 0) = -\frac{1}{4\pi\lambda} \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x'-x-r_0s)^2}{4as}} (b(t-s, x')T(t-s, x', 0) + d(t-s, x')) dx' \right] \frac{ds}{s}. \tag{39}$$

To solve a specific problem one must specify the functions b and d and then compute, possibly numerically, the expressions (38) and (39).

4. Particular case: intermittent grinding wheel

To reduce thermal damage, it is assumed that the grinding wheel is equipped with a mechanism that moves it away from the workpiece surface periodically. So, the interaction between the grinding wheel and the workpiece takes place in repeated cycles. If H denotes the Heaviside step function

$$H(z) = \begin{cases} 1 & \text{at } z \geq 0, \\ 0 & \text{at } z < 0, \end{cases} \tag{40}$$

then the boundary condition functions $b(t, x)$ and $d(t, x)$ of problem (1), (4), (5), may be given in terms of H as follows,

$$d(t, x) = -qf_p(t)H(\delta - x)H(x), \tag{41}$$

where q is the thermal flux generated by the friction between the grinding wheel and the workpiece, δ is the cutting zone depicted in Fig. 1, and

$$f_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H(nt_c + t_p - t)H(t - nt_c), \tag{42}$$

is the function which describes the times of contact between the grinding wheel and the workpiece during the whole process. Here, t_p is the length of the time interval during which contact between the grinding wheel and the workpiece occurs within the n th cycle, and t_c is the duration time of the n th cycle. This includes the contact of the grinding wheel with the workpiece, the cooling of the workpiece surface by interaction with a grinding fluid and the transit of a gap between the wheel and the workpiece surface along the band of contact. Also,

$$b(t, x) = \alpha H(-x) + \alpha H(x - \delta) + \alpha_s H(x)H(\delta - x)f_s(t) + \alpha H(\delta - x)H(x)f_c(t), \tag{43}$$

where α is the effective coefficient of heat transfer between the workpiece and the environment and α_s is the coefficient of heat transfer between the workpiece and the grinding fluid. Moreover, in (43), if t_s is the time during which contact between the workpiece and the grinding fluid takes place in a cycle n , then

$$f_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H(nt_c + t_p + t_s - t)H(t - nt_c - t_p), \tag{44}$$

is the function which describes the interaction times between the grinding fluid and the workpiece during the whole process, and

$$f_c(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H((n + 1)t_c - t)H(t - nt_c - t_p - t_s), \tag{45}$$

describes the time period in each cycle when there is no contact.

If due to thermal conduction of metal only the influence of the contact between the wheel and the workpiece surface is considered, the integral equation (39), in zero approximation, would be given by

$$\begin{aligned}
 T^{(0)}(t, x, 0) &= -\frac{1}{4\pi\lambda} \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x'-x-v_d s)^2}{4as}} d(t-s, x') dx' \right) \frac{ds}{s} \\
 &= \frac{q\sqrt{a}}{2\pi\lambda} \int_0^t \frac{f_p(t-s)}{\sqrt{s}} \left(\int_{\frac{-x-v_d s}{2\sqrt{as}}}^{\frac{\delta-x-v_d s}{2\sqrt{as}}} e^{-\xi^2} d\xi \right) ds.
 \end{aligned} \tag{46}$$

The definition of the error function erf(x) help us to write the definite integral appearing in (46) as

$$\int_{\frac{-x-v_d s}{2\sqrt{as}}}^{\frac{\delta-x-v_d s}{2\sqrt{as}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\delta-x-v_d s}{2\sqrt{as}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x+v_d s}{2\sqrt{as}} \right) \right), \tag{47}$$

so that

$$T^{(0)}(t, x, 0) = \frac{qa}{2\lambda\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_p(t-s)}{2\sqrt{as}} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\delta-x-v_d s}{2\sqrt{as}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x+v_d s}{2\sqrt{as}} \right) \right) ds. \tag{48}$$

Similarly, the temperatures field in the remaining domain of the workpiece (38) in zero approximation results

$$T^{(0)}(t, x, y) = \frac{qa}{2\lambda\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_p(t-s)e^{-\frac{y^2}{4as}}}{2\sqrt{as}} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\delta-x-v_d s}{2\sqrt{as}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x+v_d s}{2\sqrt{as}} \right) \right) ds. \tag{49}$$

In the next order approximation, when the effects of the grinding fluid and the environment on the heat-conducting path are considered, then the substitution of the zero approximations (48) and (49) into relation (38) gives for the workpiece temperatures field

$$T^{(1)}(t, x, y) = T^{(0)}(t, x, y) + \frac{1}{4\pi} \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x'-x-v_d s)^2 + y^2}{4as}} \left(\frac{y}{2as} - \lambda^{-1} b(t-s, x') \right) T^{(0)}(t-s, x', 0) dx' \right] \frac{ds}{s}, \tag{50}$$

and, from here, its surface temperature

$$T^{(1)}(t, x, 0) = T^{(0)}(t, x, 0) - \frac{1}{4\pi\lambda} \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x'-x-v_d s)^2}{4as}} b(t-s, x') T^{(0)}(t-s, x', 0) dx' \right) \frac{ds}{s}. \tag{51}$$

Numerical estimations of the improper integrals on variable x' collected in (50) and (51), respectively, show that they can be truncated to the range $0 \leq x' \leq \delta$. Therefore, the boundary condition function $b(x, t)$ given by (43) reduces to

$$b(t, x) = \alpha_s f_s(t) + \alpha f_c(t), \tag{52}$$

where $f_s(t)$ and $f_c(t)$ are the temporal aggregate functions in (44) and (45) respectively. In this case, the increase of temperature along the surface of the grinding zone turns out to be, see (50) and (52),

$$\Delta T^{(1)}(t, x, 0) \approx -\frac{1}{4\pi\lambda} \int_0^t (\alpha_s f_s(t-s) + \alpha f_c(t-s)) \left(\int_0^\delta T^{(0)}(t-s, x', 0) e^{-\frac{(x'-x-v_d s)^2}{4as}} dx' \right) \frac{ds}{s}, \tag{53}$$

or by (48)

$$\begin{aligned}
 \Delta T^{(1)}(t, x, 0) &\approx -\frac{q}{16\pi\lambda^2} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^t (\alpha_s f_s(t-s) + \alpha f_c(t-s)) \\
 &\quad \times \left[\int_0^{t-s} f_p(t-s-\theta) \left(\int_0^\delta e^{-\frac{(x'-x-v_d \theta)^2}{4as}} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\delta-x-v_d \theta}{2\sqrt{a\theta}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x+v_d \theta}{2\sqrt{a\theta}} \right) \right) dx' \right) \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} \right] \frac{ds}{s}.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Relations (53) and (54) give a basis for the development of different computational experiments which intend to optimize the manufacture process for intermittent grinding wheels.

5. Numerical results

In Fig. 2, the evolution of the temperature on the surface of the workpiece in zero approximation for different values of x is plotted.

This figure shows how the transient regime is unimportant after a small fraction of time, as it is well-known for most grinding conditions [2]. From Fig. 2 it is also clear that after four cycles the highest temperature on the surface is reached in zero approximation. The maximum value for the temperatures field is achieved at point $x = y = 0$ located at the rear edge of the grinding zone. As it is pointed also in Fig. 2, the heating of the workpiece in the opposite sense of the motion of the wheel is rather inappreciable since the conduction in the direction of the workpiece motion (x) is typically negligible.

In Fig. 3 the evolution of the difference between $T^{(0)}$ and $T^{(1)}$ is shown for $x = y = 0$. It is clear from this figure that the cooling effect on the workpiece due to thermal exchange with the environment is moderated. This effect should be greater in the case of presence of a cooling fluid.

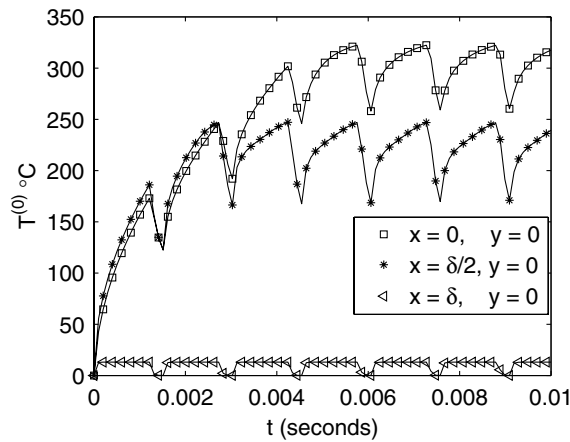


Fig. 2. Temporal paths for $T^{(0)}(t, x, 0)$ in (48).

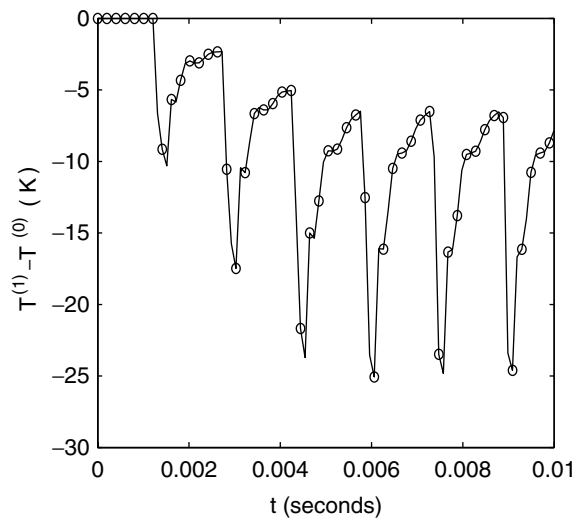


Fig. 3. $\Delta T^{(1)}(t, 0, 0)$ in (54).

For all these simulations the following set of parameters has been used:

$$\begin{array}{ll}
 a = 4.23 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, & v_d = 0.53 \text{ m/s}, \\
 \lambda = 13 \text{ W}/(\text{m K}), & \delta = 2.663 \times 10^{-3} \text{ m}, \\
 \alpha = 5.207 \times 10^4 \text{ J}/(\text{m}^2 \text{ K s}), & t_c = 1.522 \times 10^{-3} \text{ s}, \\
 \alpha_s = 27.29 \times 10^4 \text{ J}/(\text{m}^2 \text{ K s}), & t_p = 1.272 \times 10^{-3} \text{ s}, \\
 q = 5.89 \times 10^7 \text{ W}/\text{m}^2, & t_s = 0.0 \text{ s}.
 \end{array}$$

These numbers are calculated using titanium alloy VT20 temperature dependent data extracted from [11].

6. Conclusions

In this paper, a mathematical model for the evolution of the temperature in a workpiece during a grinding process has been constructed, as a parabolic boundary-value problem in a half-plane. It was shown to reduce to a system of two integral representations where the input functions, the frictional heat generation and the heat exchange rate, need to be specified in each application. This solution is meant to be a tool for the control of the grinding process efficiency. Finally, results for a real case using a workpiece made of titanium alloy VT20 are presented.

Acknowledgements

We are thankful to S. Hoyas, M. Arevalillo and J. M. Rivera for useful discussions. This work has been financially supported by the Russian–American Program Basic Researches and High Education (BRHE), grant CRDF SA-014-02, and Project *Desarrollo de Herramientas Numéricas para la Simulación y Control de Sistemas de Climatización basados en Bombas de Calor Acopladas al Terreno* from *Programa de Incentivo a la Investigación de la UPV*.

References

- [1] K.T. Andrews, M. Shillor, S. Wright, A model for heat transfer in grinding, *Nonlinear Anal.* 35 (1999) 233–246.
- [2] R.J. Gu, M. Shillor, G.C. Barber, T. Jen, Thermal analysis of the grinding process, *Math. Comput. Model.* 39 (2004) 991–1003.
- [3] A.S. Lavine, T.C. Jen, Coupled heat transfer to workpiece, wheel and fluid in grinding and the occurrence of workpiece burn, *Int. J. Heat Mass Transfer* 34 (4,5) (1991) 983–992.
- [4] A.S. Lavine, T.C. Jen, Thermal aspects of grinding: heat transfer to workpiece, wheel and fluid, *J. Heat Transfer* 113 (1991) 296–303.
- [5] T.C. Jen, A.S. Lavine, A variable heat flux model of heat transfer in grinding: model development, *J. Heat Transfer* 117 (1995) 473–478.
- [6] A.S. Lavine, An exact solution for surface temperature in down grinding, *Int. J. Heat Mass Transfer* 43 (2000) 4447–4456.
- [7] <<http://titan-association.com/eng/analytics/aviadvigatel.html>> Titan Association, 2002.
- [8] V.I. Murav'ev, A.V. Yakimov, A.V. Chernysev, Effect of deformation, welding, and electrocontact heating on the properties of titanium alloy VT20 in pressed and welded structures, *Metal Sci. Heat Treat.* 45 (2003) 419–422.
- [9] A.I. Zayed, *Handbook of Function and Generalized Function Transformations*, CRC press, Boca Raton, FL, USA, 1996.
- [10] I. Stakgold, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, second ed., John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [11] S.G. Glasunov, V.N. Moiseev, *Constructional Titanium Alloys*, Metallurgy, Moscow, 1974.

PROGRAMA DE ACCIONES ESTRATÉGICAS PARA LA INTRODUCCIÓN DEL TURISMO RURAL EN LA ZONA DE VIÑALES, REPÚBLICA DE CUBA

Isis Alejandra Camargo Toribio*, Pedro Fernández de Córdoba Castellá**,
Ismael Orquín Serrano*** y Marlén Álvarez Labrador****

Resumen. El presente trabajo forma parte de los resultados obtenidos en la tesis doctoral «*Aportaciones metodológicas para la introducción del turismo rural en la República de Cuba. Estudio de caso: zona turística de Viñales*». El objetivo principal de esta investigación es diseñar un conjunto de acciones estratégicas, y con ello lograr establecer, de forma consciente, el producto turístico rural en la zona de Viñales, provincia de Pinar del Río. Para alcanzar tal propósito se utilizó el análisis de la matriz DAFO, según la opinión de diferentes especialistas del turismo y los resultados de la aplicación de diferentes técnicas estadísticas.

Palabras claves: Acciones estratégicas, turismo rural, matriz DAFO, zona turística de Viñales.

Abstract. This paper is part of results obtained in the «*Methodological contributions towards the establishment of rural tourism in the Republic of Cuba. Case study: tourist area of Viñales*». The main objective of this research is to design different strategic actions, and establish the rural tourist product in the area of Viñales, in the province of Pinar del Río. In order to achieve this purpose, a SWOT analysis matrix was used, according to different experts in tourism, and the results of applying of different statistical techniques.

Keywords: Strategic actions, rural tourism, SWOT matrix, tourist zone of Viñales.

I. INTRODUCCION

El producto turístico cubano esta concentrado principalmente en las modalidades de sol y playa y ciudad (ver anexo 1), a partir del potencial natural que existe en la isla y las tendencias internacionales del mercado que rigen en los países del Caribe. A pesar de lo que se expone con anterioridad existen otros recursos culturales y naturales entre los que se encuentran: 287 Áreas

protegidas de recursos manejados (Ministerio de Ciencia Tecnología y Medio Ambiente, 1995) y 6 Reservas de la Biosfera (MAB, 1971. p. 4.) que posibilitan la introducción de otras modalidades turísticas, como es el caso del turismo rural.

Las escasas experiencias sobre la modalidad rural en la isla han sido las actuaciones aisladas y espontáneas surgidas de visitantes extranjeros interesados en el enriquecimiento

* Centro de Estudio de Gerencia, Turismo y Desarrollo Local, Universidad de Pinar del Río, Doctora en Geografía (Universidad de Alicante, España). isis@mat.upr.edu.cu

** Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España. Doctor en Física (Universidad de Valencia, España). pfernandez@mat.upv.es

*** Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.

**** Departamento de Matemática de la Universidad de Pinar del Río, Pinar del Río, República de Cuba. MSc. en Administración de Empresas (Universidad de Pinar del Río, República de Cuba).

de su acervo cultural a través del contacto directo con el quehacer del campesinado cubano; motivo por el cual el presente trabajo tiene por objetivo principal diseñar un plan de acciones estratégicas que apoye la introducción de esta forma de hacer turismo.

El análisis de las oportunidades, fortalezas, debilidades y amenazas (matriz DAFO), según la opinión de diferentes especialistas del turismo en la provincia de Pinar del Río, fue la herramienta principal utilizada en este trabajo para alcanzar el objetivo principal que se propone en el mismo.

Para alcanzar el propósito que se plantea con anterioridad se realiza un estudio de una región turística (Viñales), localizada en la porción centro-occidental de la provincia más occidental de Cuba, Pinar del Río, en el municipio de igual denominación. Por sus elevados valores naturales y culturales se localizan en este sitio varias distinciones de reconocimiento de carácter internacional (Paisaje Cultural del Patrimonio de la Humanidad, UNESCO, 1999) y nacional (Área Protegida bajo la categoría de Parque Nacional, Ministerio de Ciencia Tecnología y Medio Ambiente, 1997; así como Monumentos Nacionales y Locales).

El desarrollo de la modalidad que se estudia contribuiría al rescate de las tradiciones y costumbres de este sitio rural, así como el reconocimiento de sus atractivos naturales, por parte de quienes los visitan y como consecuencia se elevaría el período de estancia de los clientes, así como la captación de divisas por este concepto, fundamentalmente en aquellas regiones agrícolas, como la provincia de Pinar del Río,

cuyas condiciones naturales no favorecen un amplio desarrollo del turismo de sol y playa y ciudad.

II. DESARROLLO

II.1. Consideraciones teóricas

El desarrollo de este epígrafe tiene como base la elaboración de una matriz DAFO, que permite la combinación de los aspectos positivos y negativos de la introducción del nuevo producto, tanto en un plano interno, como externo, por lo que la confección de la misma se convierte en una tabla de doble entrada.

El análisis interno proporciona información que permite identificar los puntos fuertes y débiles del negocio, es decir, aquellos que pueden constituir fuentes de ventajas competitivas o aspectos en los que podrá centrar la acción de la competencia (Thibaut, 1994; Weihtech, 1994). Algunos de los factores que deben revisarse en el análisis interno son: estructura de la organización, novedad del producto, atributos que lo distinguen para satisfacer determinadas necesidades, tecnología disponible, etc.

El análisis externo se dirige a detectar las oportunidades y amenazas que están presentes en el entorno con relación al producto. Una amenaza es un reto planteado por una tendencia desfavorable en el entorno que, de no tomarse las medidas oportunas, repercutirán negativamente en el desarrollo del producto; por el contrario, una oportunidad es una fuerza favorable que, de aprovecharse adecuadamente, provocará ventajas compe-

titivas para el producto. En este ámbito se estudia la acción de la competencia, la dinámica y dimensión del mercado, los factores, en general, económicos, legales, tecnológicos, las posibilidades de cooperación, etc. (Wehrich, 1994).

Según los resultados y de acuerdo a la proporción de impactos, el producto se ubica en un determinado cuadrante, a partir de lo cual se adoptan las estrategias correspondientes, según muestra la figura 1.

Figura 1
Matriz DAFO

	OPORTUNIDADES	AMENAZAS
FORTALEZAS	<p>POSICIÓN OFENSIVA</p> <p>DESARROLLO DE LA IDEA DEL NUEVO PRODUCTO</p>	<p>POSICIÓN DEFENSIVA</p> <p>CREACIÓN DE ESCENARIOS Y ESTRATEGIAS (Análisis de riesgos)</p>
DEBILIDADES	<p>POSICIÓN ADAPTATIVA</p> <p>ANÁLISIS DE POSIBLES ACCIONES PARA ELIMINAR DEBILIDADES</p>	<p>POSICIÓN SUPERVIVENCIA</p> <p>ABANDONO DE LA IDEA</p>

Fuente: Thibaut (1994).

II.2. Procedimientos y resultados de la matriz DAFO

En el proceso de realización de este apartado se estableció inicialmente la *misión* de la modalidad objeto de estudio, la cual consiste en satisfacer las necesidades de los clientes que desean conocer las tradiciones campesinas y el entorno rural/natural, a través del desempeño de actividades turísticas que propicien el contacto directo con la población local.

La confección de la matriz DAFO, para el caso del producto rural de Viñales, se realiza a partir de las opiniones de diferentes especialistas que laboran en la actividad turística, con un promedio de experiencia de 10 años, que representan a las siguientes instituciones:

1. Escuela de Formación Turística (FORMATUR).
2. Cadena CUBAMAR.
3. Departamento de Turismo de las Direcciones Municipales y Provinciales de Planificación Física.
4. Parque Nacional Viñales.
5. Recreación y Campismo.

El proceso de elaboración de la matriz DAFO se desarrolla en cuatro sesiones aplicando la técnica de generación de ideas. La conclusión de las opiniones se ofrece a continuación:

Fortalezas

1. Presencia de diferentes recursos naturales que constituyen atractivos turísticos rurales.

2. Diversidad de recursos etno-culturales de origen rural.

3. Hospitalidad por parte de la población local.

4. Existencia de un sistema de formación, capacitación y educación de los recursos humanos en el territorio en materia de turismo.

5. Existencia de agencias de viaje que dinamizan la función del turismo en la zona.

6. Existencia de una planta e infraestructura turística.

7. Presencia de otros sitios de interés turísticos cercanos a la zona que pueden complementar la oferta de actividades.

8. Aprobación de diferentes distinciones entre las que se encuentran: Paisaje Cultural de la Humanidad, Monumento Nacional y Local, así como la de Área Protegida en la categoría de Parque Nacional.

9. Existencia de un aceptable volumen de información y estudios territoriales referidos a este lugar.

Oportunidades

1. Tendencias a crecer los segmentos especializados, a nivel internacional.

2. Reconocimiento a nivel internacional de elevaciones cársticas únicas, con elevados valores esceno-estéticos y diversidad biológica.

3. Reconocimiento internacional de la zona a través de la presencia de uno de los sistemas cavernarios más grandes de América Latina.

4. Reconocimiento de condiciones climáticas favorables todo el año, que facilitan atenuar la estacionalidad del turismo.

5. Presencia de instrumentos legales que plasman la protección ambiental a nivel internacional y nacional.

6. Existencia de instituciones científico-técnicas, a nivel internacional, para el estudio del turismo especializado.

7. Estabilidad política y social del país.

8. Propósito de declarar al Caribe como zona de turismo sostenible.

9. Existencia de un conjunto de organizaciones y entidades pro-ambientalistas, que pueden servir de promoción y comercialización del producto.

10. Voluntad del Ministerio de Turismo de potenciar el turismo rural en la zona.

Debilidades

1. Incomprensión respecto a las potencialidades del turismo rural, en los funcionarios del territorio, dentro y fuera del sector.

2. Limitaciones para el uso de determinados recursos naturales fundamentales para el desarrollo de esta modalidad.

3. Escasa participación de la población local en la toma de decisiones en cuestiones de política turística.

4. Carencia de una definición precisa del turismo rural en el contexto cubano actual.

5. Desconocimiento de las preferencias de los clientes que visitan la zona, asociadas a la modalidad de turismo rural.

6. No se le concede importancia a las actividades que contribuyen al rescate de las tradiciones propias de la localidad.

7. Carencia de una oferta de actividades vinculadas con la agricultura y la silvicultura.

8. No se destina un por ciento de las utilidades, por concepto de turismo, al desarrollo comunitario.

9. Existencia de procesos hoteleros y extrahoteleros que no se corresponden con las exigencias del turismo especializado.

Amenazas

1. Las decisiones en materia de turismo están supeditadas a la aprobación o no de personas ajenas al territorio que desconocen el entorno local.

2. El desempeño de los guías acompañantes se solapa con las funciones del guía local, al no existir una delimitación establecida por las agencias de viaje.

3. No existe una coordinación entre los organismos que intervienen en el uso de las áreas naturales con vocación turística.

4. Carencia de una delimitación en cuanto al objeto social de las partes que administran el recurso turístico.

5. No existe a nivel central un conocimiento acerca de la especialización en temas comerciales, que caracteriza al producto rural, que se oferta en la zona.

6. Competencia potencial de otros productos localizados en zonas rurales.

7. El bloqueo económico y comercial impuesto por Estados Unidos que prohíbe viajar directamente a los ciudadanos norteamericanos a la isla.

8. La provincia no está incluida dentro de las regiones priorizadas de desarrollo turístico del país.

9. La oferta Viñales es considerada por las agencias como una práctica y no como un destino.

Estos elementos (fortalezas, oportunidades, debilidades y amenazas) se analizan de acuerdo a las relaciones fortalezas y debilidades, con las oportunidades y amenazas, ponderando el valor de los impactos en una escala de incidencia entre 0 y 5. Las puntuaciones que se otorgan (ver anexo 2), son el resultado del consenso entre el criterio de los participantes.

El valor total de cada cuadrante es consecuencia de la suma algebraica de los impactos, lo cual permite, de acuerdo a la puntuación más elevada, ubicar a una localidad en una de las posiciones que plantea el análisis DAFO (ofensiva, defensiva, adaptativa y supervivencia) y asumir las consecuencias que al respecto se derivan. La situación actual de la zona de Viñales, la coloca en una posición adaptativa (oportunidades, debilidades), con un total de 214 puntos (ver figura 2), lo que significa que se deben aprovechar las oportunidades que se generan en el mercado y minimizar las debilidades actuales, aprovechando las fortale-

Figura 2
Resultados por cuadrantes de la matriz DAFO

	Oportunidades (I)	Amenaza (II)
Fortalezas	194	198
	(III)	(IV)
Debilidades	214	206

Fuente: Elaboración propia a partir del anexo 2

zas del sitio y atenuando las amenazas, por lo que existen las potencialidades necesarias para el diseño del producto turístico rural.

La proximidad de valores que se obtiene en los cuadrantes III y IV denota que no se puede descartar un incremento del impacto de las amenazas con debilidades que se deben transformar, lo que conduce a realizar un programa de acciones que incida en revertir la situación asociada con el factor interno adverso (debilidades).

II.3. Programa de acciones estratégicas

El presente programa de actuación, elaborado por los autores en consulta con diferentes especialistas, ha sido el resultado del análisis de la situación actual de Viñales, a partir de la combinación de: posibilidades reales que existen en materia de turismo rural, los resultados de la aplicación de técnicas estadísticas en el procesamiento de las encuestas a clientes internacionales (Camargo, 2003) y la matriz DAFO, con vistas a lograr un desplazamiento del producto hacia la posición ofensiva. La formulación de las acciones se hace a partir de la definición de las estrategias de trabajo, las que se listan a continuación:

Estrategia I: Incentivar al gobierno local de Viñales sobre la importancia del desarrollo del productor turístico rural.

Acciones

- Demostrar a los miembros del gobierno local que los resultados obtenidos de las preferencias de la demanda (Camargo,

2003), en unión con las potencialidades del territorio, condicionan la introducción del turismo rural.

- Exponer a los directivos locales las premisas en la conformación del producto turístico rural para la zona en estudio.

- Definir con el gobierno las funciones de las entidades de apoyo que pueden añadirle valor al producto turístico (Ministerio de Ciencia Tecnología y Medio Ambiente, Ministerio del Interior, Delegación Territorial de la Agricultura y Forestal, instituciones educativas, de salud y organizaciones de masas).

- Demostrar al gobierno local el impacto positivo del desarrollo del turismo rural en los aspectos sociales, económicos y ecológicos.

Estrategia II: Diseñar un producto turístico rural que combine las potencialidades reales y las expectativas del cliente.

Acciones

- Desarrollar actividades vinculadas con las formas de vida rural, entre las que se encuentran:

1. Visitas a explotaciones agrícolas: la actividad obtuvo la primera posición dentro de la componente «Ofertas de acercamiento a las formas de vida campesina» (Camargo, 2003), de acuerdo a la opinión de los clientes; la misma debe estar dirigida a mostrar los principales cultivos de la zona (tabaco, café y viandas (1)). En la visita el cliente debe ampliar su conocimiento

acerca de los mismos a través de cuestiones relacionadas con: la procedencia, épocas de siembra y recolección, usos, características del suelo donde se cultiva, medios de trabajo que se emplean, etc.

2. **Apreciación arquitectónica:** la esencia de la misma debe estar encaminada a mostrar las diferentes tipologías de construcciones urbanas y rurales (bohío (2), vara en tierra (3) y casa de tabaco (4)). En esta actividad es importante relatar los orígenes de las mismas, su función, los materiales empleados para la construcción, así como anécdotas vinculadas con la temática.

3. **Actividades agropecuarias:** esta actividad ubica al visitante en una posición activa, a través de la participación en: el manejo de los animales de corral; la utilización de instrumentos de trabajo tradicionales, con diferentes fines agrícolas (grada o peine (5), arado de madera o americano (6)); ordeño de vacas; así como la siembra y/o recolección de viandas, tabaco, café y frutos. Deben ser realizadas de manera combinada como una oferta única.

• Desarrollar actividades al aire libre (Camargo, 2003) referidas a:

- Senderismo, caminata o recorrido.
- Trekking.
- Exploración de grutas y cavernas.
- Rutas ecológicas.
- Observación de aves en lugares específicos o combinadas con otras actividades.

El diseño de estas actividades debe tener en cuenta el uso de aquellos recursos naturales turísticos de mayor importancia para el cliente, que según Camargo (2003), resultaron los siguientes: paisaje, vegetación y flora, fauna y relieve, teniendo en cuenta que existe un límite en cuanto al número de personas que pueden asistir a estos sitios, expresado a través de la capacidad de carga de los mismos, así como la muestra de las diferentes distinciones de reconocimiento (Parque Nacional; Monumento Local y Nacional y Paisaje Cultura del Patrimonio de la Humanidad).

• Desarrollar actividades culturales como:

- Ferias sobre diferentes temas propios de la localidad como: la oralidad (7) —cualidad distintiva del campesino viñalero—, muestra de gallos de *Lidia*, cultivo del tabaco, artesanía (cestería con fibra vegetal, especialmente con el guaniquiqui, trabajos con semillas, confección de muñecas de trapo y producción en miniatura de muebles e inmuebles típicos).
- Visita a lugares históricos como son: monumentos, escenarios, encuentros con personalidades vinculadas con sucesos históricos de la zona.
- Festivales de música y danza campesina tradicional.

• Desarrollar actividades deportivas, entre las que se encuentran:

- Cicloturismo por rutas rurales.
- Actividades náuticas de acuerdo a las peculiaridades de los recursos hídricos de la zona, en cuanto a la presencia de ríos de poco caudal.
- Escalada.

Las dos últimas actividades citadas, aunque son preferidas por clientes provenientes de determinados países, Reino Unido, Estados Unidos y Canadá, expuesta por Camargo (2003), deben tenerse en cuenta como actividades importantes para estos visitantes y como opcionales para el resto (Francia, Alemania y España).

• Adecuar la planta hotelera (estatal y privada) a las exigencias del desarrollo del producto turístico rural que contemple:

- Una decoración acorde con la cultura local y el entorno natural, utilizando los recursos forestales, con una utilización sostenible del bosque, así como manifestaciones tales como: pinturas, esculturas, grabados, trabajos artesanales, etc.
- Ambientar los exteriores con plantas propias de la zona.
- Implementar un mobiliario con el estilo y el modelo propio de la región (trabajos en madera y artesanales).
- Diseñar un menú a la carta o mesa *bufet* que contemple la tradición gastronómica, basado en frutas de la región (anón, guanábana, chirimoya,

caimito, mango, fruta bomba, guayaba, plátano, etc.), vegetales, viandas (yuca, malanga, papa, boniato, etc.), y carnes, en función de las recetas y modos de cocción típicos.

- Utilizar productos biodegradables en la limpieza e higiene de las instalaciones de alojamiento.
- Diseñar correctamente el plan de animación y recreación específico para el hotel, que incluya:
 - * Desarrollo de opcionales en la periferia de la instalación.
 - * Dominio de leyendas, cuentos, historias, motivados por el entorno que los rodea.
 - * Contratar un grupo de guías locales expertos en: comunicación, idioma, técnicas de orientación y conocedores de la historia, cultura y tradiciones de la región.
 - * Diseñar un programa musical respetuoso con las tradiciones y el entorno rural.

Relacionado con estas actividades se encuentran elementos que están presentes en todas, como son: degustar los platos típicos de la región, y el interés por conocer las costumbres de las familias campesinas; además se debe añadir a la oferta rural actividades complementarias de la modalidad de sol y playa, motivado por la cercanía de otros sitios de interés turístico próximos a la zona de estudio, respetando que la oferta principal debe estar marcada por la que se estudia en este trabajo.

Estrategia III: Adicionar valor al producto turístico rural, mediante la integración de procesos complementarios.

Acciones

- Dirigir la educación ambiental, en los diferentes niveles de enseñanza y a la población en general, hacia el turismo rural en función de:

- Protección del medio natural.
- Rescate de las tradiciones.
- Capacitación de los guías y la comunidad.
- Capacitación a los directivos del gobierno.

Las acciones citadas con anterioridad persiguen el fomento y la conservación de los recursos naturales y del patrimonio cultural de la zona y sienta las bases para el desarrollo de un turismo sostenible local.

- Ofertar a las agencias de viaje el diseño propuesto de producto rural, con el objetivo de que sea conocido y valorado para su posterior comercialización.

- Definir las cadenas y agencias de viajes específicas que se responsabilizarán, desde el punto de vista comercial, con el nuevo producto.

Estrategia IV: Establecer un sistema de control, que permita conocer las expectativas y los niveles de satisfacción del cliente rural.

Acciones

- Elaborar los instrumentos de control sobre los niveles de satisfacción, a escala local y en función de la modalidad que se estudia.

- Diseñar y establecer un sistema de control automatizado, para todas las entidades turísticas, que facilite el análisis del indicador satisfacción/insatisfacción del cliente.

- Continuar añadiendo valor al producto a partir de un monitoreo que garantice la retroalimentación de todos los elementos involucrados en el desarrollo del turismo rural.

Estrategia V: Incorporar a la comunidad al proceso de gestión del producto turístico rural.

Acciones

- Demostrar la importancia del papel protagónico de la comunidad local en la gestión del turismo.

- Analizar las decisiones en materia de turismo, tomadas por las diferentes instituciones, entre los pobladores y permitir que éstos puedan revocar o reafirmar el dictamen.

- Hacer participe a la comunidad de:

- Las predicciones, sobre la base de estudios realistas de mercado, en relación con los ingresos que pueden ser obtenidos en diferentes condiciones de utilización (diferentes escenarios).

— Los beneficios sociales y ambientales que pueden derivarse del turismo rural.

— Los impactos negativos que serían inevitables y estimar su valor.

- Crear grupos de trabajo, formados por miembros de la comunidad, capaces de proveer a las entidades gubernamentales de nuevas iniciativas turísticas apoyadas en las costumbres y tradiciones locales.

- Trazar nuevas líneas de trabajo, en apoyo al turismo rural, por parte del Ministerio de Ciencia Tecnología y Medio Ambiente, Delegación Territorial de la Agricultura y Forestal, de consenso con la comunidad

II.4. Visión del turismo rural

Como consecuencia de los análisis realizados en los epígrafes anteriores, la percepción que se tiene del turismo rural en un futuro próximo, a partir de la situación actual, es la siguiente:

Los clientes responden a un determinado segmento del mercado que busca compartir y aprender a través de contactos vivenciales con las poblaciones locales, que le muestren el patrimonio etno-cultural heredado de sus ancestros.

La oferta garantiza que el tiempo de estancia del cliente en la zona esté colmado de una gama de actividades en contacto directo con la naturaleza y los grupos humanos que la han preservado y viven de

ella, diseñadas a partir de sus preferencias y que lo mantenga en constante «movimiento».

Los recursos naturales y sociales están debidamente conservados y constituyen atractivos que responde a un desarrollo turístico sostenible.

Los pobladores y las diferentes entidades trazan la política en materia de turismo de su comunidad, donde resalta el papel protagónico de la población.

Los miembros de la comunidad constatan, de manera directa, los beneficios económicos, sociales y ecológicos del turismo rural; así como poseen la preparación para tomar las medidas que amortigüen los efectos negativos.

Las acciones que se acometen en el desarrollo de la actividad turística sirven de motor impulsor de otros sectores como la agricultura, ganadería, construcción, etc.

Las personas de mayor edad de la comunidad son promotores de las tradiciones campesinas que legaran a las actuales y futuras generaciones.

El sello que distingue el turismo rural, de una zona y de otra, bajo los mismos preceptos, es la muestra real de su patrimonio, realizado a través del reconocimiento de los visitantes que asisten al lugar y donde los pobladores tienen conciencia de la importancia que tiene el mismo, para alcanzar un desarrollo turístico local.

III. CONCLUSIONES

- La situación actual en la localidad de Viñales, en el análisis de la matriz DAFO, se ubica en una posición adaptativa (Oportunidades, Debilidades), con un total de 214 puntos lo que significa que se deben aprovechar las oportunidades que se generan en el mercado y minimizar las debilidades actuales, aprovechando las fortalezas del sitio y atenuando las amenazas, por lo que existen las potencialidades necesarias para el diseño del producto turístico rural.

- El diseño de acciones estratégicas debe contar, en principio, con la declaración de la misión que debe tener la modalidad rural en la localidad, la cual plantea, en síntesis, la satisfacción del cliente y el rescate del patrimonio etno-cultural, a través del desempeño de actividades turísticas que propicien el contacto directo con la población local.

- La Estrategia II: Diseñar un producto turístico rural que combine las potencialidades reales y las expectativas del cliente; es considerada por los autores la de mayor relevancia para iniciar el proceso de introducción del turismo rural en la zona que se estudia, sin restarle importancia al resto.

- Dentro de la visión que tienen los autores del turismo rural se destaca cómo el fenómeno demográfico del envejecimiento de la población, que se presenta en las zonas rurales de forma reiterada, puede convertirse en un reto para esta modalidad al plantearse el papel que juegan las personas de mayor edad de la comunidad, como

promotores de las tradiciones campesinas que legaran a las actuales y futuras generaciones.

- La muestra de un patrimonio etno-cultural auténtico marca la diferencia del turismo rural de una zona y de otra, aspecto que se realiza a través del reconocimiento de los visitantes que asisten al lugar y donde los pobladores tienen conciencia de la importancia que tiene el mismo, para alcanzar un desarrollo turístico local.

BIBLIOGRAFÍA

- CAMARGO, I. (2003): Aportaciones metodológicas para la introducción del turismo rural en la República de Cuba. Estudio de caso: zona turística de Viñales. Pinar del Río. 288 h. Tesis (en opción al grado científico de Doctora en Geografía). Universidad de Alicante.
- CENTRO DE INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO DE LA CULTURA CUBANA (2000) [cd-rom]. En: Atlas etnográfico de Cuba. Cultura popular tradicional.
- MINISTERIO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA Y MEDIO AMBIENTE. (1997): *Declaratoria Valle de Viñales de Área Protegida bajo la categoría de Parque Nacional*. Resolución no. 36.
- MINISTERIO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA Y MEDIO AMBIENTE. (1995): *Cuba: Medio Ambiente y Desarrollo*. Ministerio, CIDEA. La Habana. 85 p.
- SALINAS CHÁVEZ, E. y MUNDET I Cerdán, LL. (2000): El turismo en Cuba. Un análisis geográfico. En. Revista Geographicalia. España, enero: 53-66.
- THIBAUT, J. P. (1994): Manual de diagnóstico de la empresa. Madrid, España. Editorial Paraninfo S. A. pp. 20-32.

UNESCO. (1999): Declaratoria de Paisaje Cultural del Patrimonio de la Humanidad. XXIII Sesión del Comité de Patrimonio Mundial. 29 nov. al 4 de dic. Marrakesh, Marruecos.

WEIHTECH, H. (1994): Excelencia administrativa. Productividad mediante administración por objetivos. Madrid, España. Editorial Paraninfo S.A. pp. 10-35.

NOTAS

(1) Vianda: se aplica este nombre en Cuba a tubérculos como la yuca, el ñame, la malanga, la papa y el boniato, así como otros frutos (plátano y calabaza), que se sirven hervidos o fritos.

(2) Bohío: típica vivienda campesina de techo de guano y paredes de tabla, a la que se añaden pequeñas construcciones de madera para efectuar la cocción de alimentos con leña, el almacenamiento de víveres, etc.

(3) Vara en tierra: construcción de muy bajo puntal, empleada para guardar instrumentos de trabajo y protegerse en tiempo de ciclón.

Agradecimientos

Los autores agradecen al profesor Javier Esparcia Pérez su inestimable ayuda en la elaboración del presente trabajo.

(4) Casa de tabaco: amplia casona de puntales elevados y planta rectangular que se emplea para el curado de la hoja del tabaco; generalmente su cubierta y paredes son de guano y la estructura, de madera rústica.

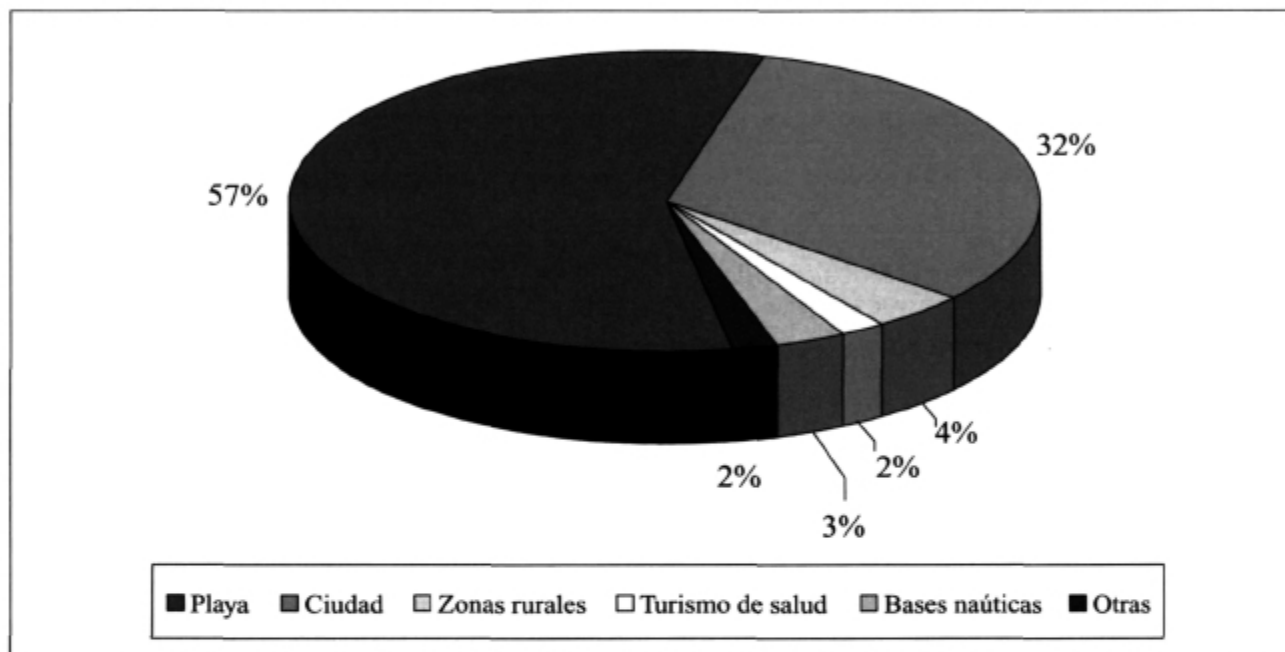
(5) Gradas o peine: apero de labranza construido mediante un bastidor o marco de madera con dientes de madera o de hierro. Se emplean para recoger las ramas y hierbas arrancadas en las labores con el arado, para desmenuzar los terrones de tierra y mullir el terreno, complementando el trabajo realizado con el arado (Centro de Investigación y Desarrollo de la Cultura Cubana, 2000).

(6) Arado de madera o americano: implemento para romper, cruzar, surcar y aporcar, construida de madera, con la excepción de la reja que es metálica (Centro de Investigación y Desarrollo de la Cultura Cubana, 2000).

(7) Oralidad: manifestación basada en el lenguaje oral, para transmitir de generación en generación, el acervo cultural campesino, a través de leyendas, mitos y cuentos.

ANEXOS

Anexo 1 Porcentaje de la capacidad hotelera en 1995



Fuente: Salinas y Mundet, 2000

Anexo 2 Resultados de la matriz DAFO

	OPORTUNIDADES											AMENAZAS										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	T	
FORTALEZAS	1	5	5	4	0	4	3	0	4	3	2	30	0	0	4	3	2	5	0	5	3	22
	2	5	3	3	0	0	4	0	5	5	4	29	2	3	4	4	4	5	0	3	4	29
	3	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	2	5	5	1	0	2	4	5	5	2	29
	4	3	0	0	0	0	3	1	3	1	0	11	0	3	0	3	5	3	0	0	2	16
	5	5	3	3	2	0	3	1	1	3	3	24	0	5	0	5	3	5	0	2	5	25
	6	5	0	0	0	2	0	1	0	1	4	13	5	0	2	0	1	5	0	0	0	13
	7	3	0	0	2	1	0	4	3	2	4	19	5	0	0	3	2	5	0	4	2	21
	8	5	5	5	2	5	4	1	5	4	3	39	0	0	4	4	3	5	0	2	4	22
	9	0	3	3	0	0	5	2	5	5	4	27	0	0	5	1	5	5	0	2	3	21
	T	31	19	18	6	12	23	10	27	24	24	194	17	16	20	23	27	42	5	23	25	198
DEBILIDADES	1	5	5	5	4	4	4	3	0	5	4	39	4	0	5	5	5	4	0	4	4	31
	2	3	0	0	0	4	2	1	0	1	5	16	5	0	5	3	3	3	0	0	2	21
	3	5	0	0	0	2	3	2	5	4	3	24	3	0	3	0	4	4	0	3	3	20
	4	5	2	2	0	0	5	0	4	4	0	22	4	0	3	0	5	4	0	2	5	23
	5	5	0	0	0	0	5	0	0	0	0	10	0	3	0	3	5	5	0	0	5	21
	6	5	0	0	0	3	3	0	5	5	5	26	3	3	3	0	5	5	0	4	4	27
	7	5	0	0	3	0	5	0	5	4	5	27	5	4	4	3	5	5	0	0	0	26
	8	5	0	0	0	0	4	2	5	4	4	24	4	0	2	0	2	5	0	2	2	17
	9	5	0	0	0	4	4	0	5	4	4	26	4	0	1	0	5	5	0	3	2	20
	T	43	7	7	7	17	35	8	29	31	30	214	32	10	26	14	39	40	0	18	27	206

Fuente: Elaboración propia a partir de la opinión de los especialistas.

ESTUDIO DEL PATRIMONIO DE LA LOCALIDAD DE VIÑALES, REPÚBLICA DE CUBA, PARA LA INTRODUCCIÓN DEL TURISMO RURAL

*Isis Alejandra Camargo Toribio**

Universidad de Pinar del Río (Cuba)

*Pedro Fernández de Córdoba Castellá***

Universidad Politécnica de Valencia

*Amaury Valdéz**

Universidad de Pinar del Río (Cuba)

RESUMEN

El presente trabajo forma parte de los resultados obtenidos en la tesis doctoral «*Aportaciones metodológicas para la introducción del turismo rural en la República de Cuba. Estudio de caso: zona turística de Viñales*». El objetivo principal del mismo es analizar los diferentes recursos naturales y culturales que conforman el patrimonio turístico de una localidad (Viñales), en la República de Cuba, con el fin de apoyar la introducción de la modalidad de turismo rural. Para alcanzar tal propósito se realizaron varias entrevistas a trabajadores del turismo y familias campesinas de la región quienes, con su experiencia y sabiduría popular, contribuyeron a la realización de esta investigación.

Palabras clave: patrimonio turístico, turismo rural, Viñales, República de Cuba.

ABSTRACT

This work presents part of the results obtained by the PhD research thesis «*Aportaciones metodológicas para la introducción del turismo rural en la República de Cuba. Estudio de caso: zona turística de Viñales*». The main aim of this research is the analysis of the different

Fecha de recepción: 14 de marzo de 2005.

Fecha de aceptación: 25 de mayo de 2005.

* Centro de Estudio de Gerencia, Desarrollo Local y Turismo. Universidad de Pinar del Río. Martí 270 (final). CP. 20100 PINAR DEL RÍO (República de Cuba). E-mail: isis@mat.upr.edu.cu

** Departamento de Matemática Aplicada. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera, 14. 46022 VALENCIA (España). E-mail: pfernandez@mat.upv.es

natural and cultural resources which form the turistic patrimony of a province (Viñales), in the Republic of Cuba, to support the introduction of rural tourism modality. Several questionnaires to tourism workers and farmer families of the place were made to reach the goal mentioned by means of their experience and popular wisdom, contributing to the conclusion of this investigation.

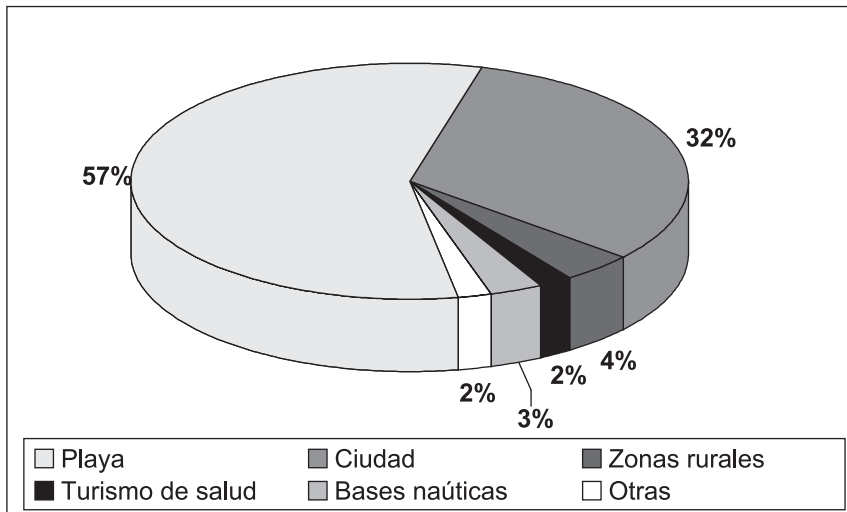
Key words: turistic patrimony, rural tourism, Viñales, Republic of Cuba.

1. INTRODUCCIÓN

El turismo en la República de Cuba se ha convertido en los últimos diez años en una alternativa para el crecimiento y diversificación de la economía nacional, donde las modalidades de sol y playa, así como de ciudad, han encontrado un espacio propicio para su desarrollo (figura 1), sustentado en lo fundamental por las amplias posibilidades de recursos naturales y culturales y por las tendencias de mercado que rigen en las islas del Caribe.

A pesar de lo expuesto con anterioridad existen en el país otros recursos naturales y culturales que permiten la introducción de otras modalidades turísticas, que pueden ser combinadas con las ya existentes, como es el caso del turismo rural; a tal efecto dicha opción se concibe como un factor de desarrollo de las áreas rurales/naturales, constituyendo un componente básico de las economías a escala local (Vera et al. 1997).

Figura 1
DISTRIBUCIÓN DE LA CAPACIDAD HOTELERA EN CUBA. 1995



Fuente: Salinas Chávez, E. y MUNDET CERDAN, LL. (2000): «El turismo en Cuba. Un análisis geográfico».

A partir de estas premisas, el presente trabajo tiene como objetivo principal analizar los recursos naturales y culturales de la localidad de Viñales, provincia de Pinar del Río, como un instrumento de apoyo a la introducción del turismo rural.

Para dar cumplimiento al mismo se intenta conocer la realidad actual, a través de la utilización de diferentes técnicas como son: entrevistas a trabajadores del turismo que atienden directamente a los clientes internacionales y familias campesinas que han sido partícipes de actividades desarrolladas por los turistas que asisten a la zona, así como la revisión documental.

2. CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LA ZONA DE VIÑALES

La región turística de Viñales objeto del presente estudio, tiene una extensión de 253.441 km². Se localiza en la porción centro-occidental de la provincia más occidental de Cuba, Pinar del Río, en el municipio de igual denominación. De acuerdo a la regionalización físico-geográfica de Cuba se encuentra dentro de la Región «Cordillera de Guaniguanico», subregión «Sierra de los Órganos».

Por sus elevados valores naturales y culturales se localizan en esta región varias distinciones de reconocimiento entre las que se encuentran, de carácter internacional, Paisaje Cultural del Patrimonio de la Humanidad, UNESCO (1999) y nacional Área Protegida bajo la categoría de Parque Nacional, Ministerio de Ciencia Tecnología y Medio Ambiente¹ (1997); así como Monumentos Nacionales y Locales.

La evidencia de lo singular de este sitio se ve reafirmada a través de áreas montañosas que conservan en alto grado su estado natural, producto del difícil acceso y escasos suelos (Luis, 2001). Según Marrero (1955), Núñez et al. (1959), Acevedo (1980), las elevaciones cársticas presentes en la región son las más relevantes de Cuba, donde se manifiesta una de las más notables morfologías de carso cónico del mundo (Núñez et al., 1984), sólo comparables con alturas localizadas en el sureste de Asia, en particular China y Vietnam, con elevados valores esceno-estéticos, diversidad biológica y desarrollo de numerosas formas cársticas, por cuya razón se le conoce como la capital del carso tropical (Gutiérrez, 1994). Unido a lo anterior, se localiza en la zona uno de los sistemas cavernarios más grandes de América Latina, lo que ratifica su exclusividad con respecto a otras regiones.

Otro elemento, que confirma lo valioso del lugar, según la DPPF² (1999) es, *«la inserción de la obra humana en un medio donde los distintos elementos culturales que se entremezclan en un marco físico excepcional, se desdoblán en un paisaje cultural³ con características espectaculares y representativas, donde el mestizaje cultural, unido a diferentes formas de cultivo tradicionales, como el tabaco, considerado el mejor del mundo, ha devenido en un paisaje multiforme y cambiante, con escasa alteración del equilibrio y la armonía entre el hombre y la naturaleza».*

1 Ministerio de Ciencia Tecnología y Medio Ambiente: Las siglas de este ministerio es CITMA.

2 DPPF: Dirección Provincial de Planificación Física.

3 Paisaje cultural: es el resultado de la relación Sociedad - Economía - Cultura - Naturaleza, Mateo (1991).

Como resultado de la combinación de los diferentes componentes del paisaje en su concepto más amplio, visto como la formación antroponatural, Mateo (2000), la zona posee una tradición turística que hoy se ve enfocada hacia un turismo de naturaleza, según comunicación personal de Alonso, A. (2002), funcionario de la Delegación Territorial del MINTUR⁴, denominación que recoge un conjunto de ofertas que se desarrollan en un medio poco contaminado, donde los turistas pueden estar en contacto con la naturaleza. Esta designación está en correspondencia con la empleada por los turoperadores, que pueden utilizar indistintamente diferentes denominaciones.

A raíz del planteamiento anterior se puede afirmar que la calificación empleada para el producto turístico local no entra en contradicción con lo expuesto en el concepto de turismo rural elaborado por Camargo (2003), aunque los autores consideran que se debe añadir, como un elemento importante, el contacto con la población local, a través del conocimiento de sus tradiciones presentes en el patrimonio etno-cultural.

De acuerdo a la importancia que tienen los recursos naturales en la zona que se estudia, según se ha citado anteriormente, en los epígrafes que siguen (2.1.1.1 hasta el 2.1.1.8) se describen las principales características de los recursos turísticos naturales, así como una valoración de sus principales atractivos desde el punto de vista turístico.

2.1. Recursos naturales turísticos

2.1.1. Geología

Se presenta la geología de forma compleja, con mantos escamas tectónicas originados en la fase larámica tardía de la orogenia Alpina, del Eoceno medio. La litología es arenarcillosa con paquetes de cuarcitas, dotadas paleontológicamente, con restos fósiles de ammonites y helechos, entre otros, CITMA (2003) y Luis (2001), las cuales aparecen como pizarras y esquistos. También existen rocas carbonatadas, del jurásico superior y cretácico, las que aparecen preferentemente en bloques olistolíticos. En ocasiones, las calizas tienen bajo grado de metamorfismo y en algunos puntos aparecen marmorizadas, Acevedo (1992 y 1980). En menor medida, se hallan depósitos pleistocénicos que se localizan en el fondo de los valles y las poljas cársticas y de contacto, CITMA (2003).

Como atractivo turístico se considera la diferencia tan marcada entre las rocas arenarcillosas y las carbonatadas, además de fallas locales, plegamientos y sucesos asociados a la historia geológica de la región, tales como el KTB (Kretacic-Terciary Boundary), o simplemente contactos litológicos, como ocurre entre las formaciones Jagua y el miembro San Vicente de Guasasa, las cuales difieren por ser una estratificada y la otra masiva.

2.1.2. Relieve

Existen tres tipos fundamentales de relieve, de acuerdo a Luis, et alii. (1993) y la DPPF (1999), los cuales son:

4 MINTUR: Ministerio del Turismo de la República de Cuba

1. Llanuras altas cárstico-acumulativas planas a ligeramente onduladas, que responden a las depresiones dentro de la región montañosa, se incluyen hoyos y valles (nombre vernáculo o local de este tipo de relieve) que en realidad son dolinas, uvalas y poljas, entre estas últimas, las marginales de contacto entre las dos litologías fundamentales: calizas y pizarras, donde se destacan el Valle de Viñales, Ancón, Pan de Azúcar y otros.
2. Alturas y montañas cárstico-tectónicas, que alcanzan entre 200-500 m de altitud. Estos macizos cársticos por la forma pueden ser: sierras, cuando están agrupados y mogotes cuando están aislados. Por la fisonomía de sus cimas pueden ser cupulares, cónicos o de torres. De manera general sus laderas son verticales o abruptas, debido a la masividad de las rocas. Cuando la formación rocosa es muy estratificada, se presentan áreas carsificadas donde las pendientes son suaves y alcanzan poca altura, los cuales son alturas de carso ruiniforme. Estos macizos se caracterizan por presentar un gran desarrollo de procesos cársticos cuyas principales manifestaciones son: la presencia de lapiez (diente de perro) con abundancia de cuevas en su interior.
3. Alturas estructuro-tectónicas erosivo-denudativas de pizarras que alcanzan en la zona hasta 269 m de altitud, se caracterizan por presentar crestas amplias y en menor proporción aplanadas, lo cual está en dependencia de la dureza de las rocas que afloran. En la zona de estudio las laderas que dan al valle son abruptas (fuertes pendientes) mientras que las laderas interiores son más suaves con una gran cantidad de cañadas o valles pequeños en forma de «V» por donde escurre el drenaje fluvial. El atractivo turístico viene dado por la diferencia entre los dos tipos de relieve, de alturas y montañas, los cuales son contrastantes y llama la atención por sí mismo. En cuanto a las llanuras altas (valles), son los puntos focales donde pueden destacarse las formas del relieve en distancia, a la vez que son las áreas utilizadas por el hombre para su desempeño diario.

2.1.3. *Clima*

Las variables meteorológicas que caracterizan el clima de la zona presentan una diferenciación en correspondencia con el tipo de relieve. De esta forma, las montañas presentan una media anual de 21-22 °C, registrándose en sus cimas los valores más bajos de la región. También en los valles cerrados se registran valores similares, lo que demuestra la incidencia de los efectos de la radiación y circulación del aire. En los valles abiertos y en las pequeñas elevaciones la media anual es de 20-21 °C. En las Alturas de Pizarras los registros de máximos valores (26-28 °C) se obtienen en el período desde mediados de junio hasta principios de octubre, en los horarios entre las 10:00 y las 15:00 hrs. En los meses desde enero hasta febrero, en los horarios desde las 04:30 hasta las 07:00 hrs. se registran los mínimos valores (16-18 °C). En los valles cerrados y ensenadas los máximos valores están entre 24-26 °C en el período desde junio hasta octubre, en los horarios desde las 09:00 hasta las 16:00 hrs., mientras que los registros mínimos (14-16 °C) abarcan desde mediados de diciembre hasta marzo, en los horarios entre las 01:30 y las 09:00 hrs., Lope-tegui et alii (1996).

Los indicadores promedio de precipitaciones de la región son los siguientes según la DPPF (1999):

- Lluvias anuales: 1 835 mm (más de 1800 en los macizos cársticos y entre 1 660 y 1 800 en las llanuras y alturas de pizarras).
- Mes más lluvioso: junio con 297 mm.
- Mes menos lluvioso: diciembre con 64,6 mm.
- Días con lluvia al año: 136.
- En el período lluvioso (desde mayo hasta octubre): 88 días, con un acumulado de 1 347 mm.
- En el período menos lluvioso (desde noviembre hasta abril): 48 días, con un acumulado de 488 mm.

Son destacables las grandes variaciones de los datos estadísticos que, en el caso de las lluvias, dependen de los ciclones y los frentes fríos, éstos últimos con una frecuencia media de 19 frentes/año. La humedad relativa promedio es de 84%.

El atractivo está dado por ser un clima tropical, con características insulares, donde los veranos son frescos y los inviernos poco calurosos. Indiscutiblemente la mejor época para los visitantes de las latitudes templadas, lo cual caracteriza a la demanda turística actual, corresponde al período entre diciembre y abril, donde son temperaturas frescas y por lo general lluvias aisladas, no existiendo los aguaceros propios del verano, debido a la convección.

2.1.4. Hidrología

La zona se asienta sobre las cabezadas de 4 cuencas hidrográficas principales, Zacarías, Palmarito, Santo Tomás y el Albino, las cuales nacen en el parteaguá principal de las Alturas de Pizarras del Sur, los dos primeros drenan hacia la vertiente norte y los restantes hacia el sur. Las corrientes del Zacarías, Palmarito y Santo Tomás, drenan a través de los macizos cársticos, formando sistemas cavernarios fluviales que representan los diferentes niveles geomorfológicos a que ha estado sometida la región.

En cuanto al escurrimiento superficial regulado se destacan dos embalses (El Salto y El Yayal), los que tienen la finalidad fundamental del abasto de agua a la población, aunque además se destinan al riego de cultivos agrícolas y a la acuicultura. También se destaca la Laguna de Piedra y una serie de micropresas y tranques más pequeños, entre los que cabría destacar los ubicados en el valle de Santo Tomás, construidos con la finalidad principal de evitar las inundaciones, González (1988).

Otro elemento a destacar según la DPPF (1999) es la existencia de yacimientos de aguas mineromedicinales reportados desde 1871, y que han sido utilizados históricamente por los habitantes de la región. Las fuentes captadas y en explotación contienen aguas del tipo sulfatada cálcica de baja radioactividad, con temperaturas de 30 - 31 °C y una mineralización total de 1.57-1.65 g/l. El contenido de SO es de 900 - 920 mg/l y los caudales reportados superan los 6 l/seg. con una reserva de explotación calculada para unos 5000 pacientes potenciales.

Los atractivos están dados por la existencia de corrientes fluviales permanentes (Pan de Azúcar y Ancón, con aguas no contaminadas, ubicados en lugares con saltos de agua y bosques, con altos valores esceno-estéticos, donde se pueden ofertar baños, senderos interpretativos y caminatas. Las aguas minero-medicinales tienen uso turístico, desde la década del 40 del pasado siglo, cuando se construyeron los primeros hoteles, los cuales siempre prestaron servicios turísticos rurales.

2.1.5. Suelos

El relieve elevado permite que existan procesos erosivos predominantes, por lo que, mayormente, existen suelos esqueléticos sobre calizas, pizarras, esquistos y cuarcitas. Los materiales residuales de las calizas son las arcillas, que al quedar «*in situ*», dan origen a protorrendzinas rojas, las que evolucionan a rendzinas rojas y a suelos ferralíticos rojos típicos y ocupan las partes más elevadas de las dolinas, uvalas y poljas cársticas, CITMA (2003).

Hacia la parte más baja de las pendientes exteriores de las alturas calcáreas, de acuerdo con el CITMA (2003), pueden aparecer suelos pardos con carbonatos. Hacia las alturas areno-arcillosas, compuestas por pizarras, esquistos, filitas y cuarcitas muy agrietadas y friables, los suelos son friables y dan origen a material residual, compuesto fundamentalmente por arcillas, arenas y fragmentos de cuarzo que se acumulan en el fondo de los valles planos y poljas marginales, donde predominan suelos derivados de estos materiales de tipo ferralítico rojo amarillento y con diferente grado de lixiviación según el contenido de fragmentos de arena de cuarzo y tiempo de evolución.

Hacia los valles fluviales pueden encontrarse depósitos, en cuyos planos aluviales pueden aparecer parches de suelos areno-cuarcíticos. En las dolinas, uvalas y poljas cársticas típicas de las elevaciones calizas que están conectadas a cuevas fluviales, aparecen también suelos aluviales y ferralíticos rojo amarillentos con diferentes grados de lixiviación, debido al material areno-arcilloso depositado allí por las corrientes fluviales, CITMA (2003).

El atractivo fundamental radica en la gran variabilidad areal de tipos de suelo y las coloraciones rojo-naranja-amarillo, que pueden destacarse en cualquier itinerario que se realice a través de la región, lo cual llama poderosamente la atención de los visitantes de países templados.

2.1.6. Vegetación

Las formaciones vegetales según Capote y Berazaín (1984); Luis (2001), en el área pueden clasificarse de la forma siguiente:

1. Complejo de vegetación de mogotes. Contiene diferentes formaciones, según Luis (2001) que son:
 - Matorrales xeromorfos de mogotes.
 - Bosque semideciduo mesófilo.
 - Bosque siempreverde micrófilo.
 - Bosque siempreverde mesófilo.

Este complejo constituye el más conservado, y se debe principalmente a dos factores: la inaccesibilidad y a la falta de suelo, en el sentido agrícola. De ahí que los matorrales ubicados en las cimas y paredones se encuentren en estado natural; el siempreverde micrófilo, algo alterado y el semideciduo mesófilo y siempreverde micrófilo presentan los mayores grados de antropización, por lo que habría que considerarlos antroponaturales.

2. Pinares naturales y en plantaciones con Encinos, desarrollados en las Alturas de Pizarras, medianamente conservados, con intereses silvícolas, aunque sin intervención reciente.
3. Matorral secundario con predominio de arbustos, resultado de la deforestación de una porción del bosque semideciduo ubicado en la base de las alturas y montañas cársticas.

En el valle predominan cultivos de tabaco intercalados con viandas, pastos y algunas plantaciones de frutos menores. En las áreas urbanizadas y en zonas puntuales con infraestructura turística existen árboles ornamentales y césped.

La flora de las alturas y montañas cársticas y pizarrosas tienen inventariadas más de 1000 especies, con mayor riqueza hacia los mogotes y sierras cársticas (unas 700), mientras que el endemismo pancubano es alto (más de un 30 %); hay un marcado endemismo distrital, donde pueden localizarse 40 de las 59 existentes y la presencia de dos endemismos locales: *Dorstenia roigii* y *Bonania bissei*. Las pizarras son monodominantes de pinus y el endemismo es bajo, menos del 15%. El máximo exponente del endemismo pinareño, lo constituye la Palma Corcho (*Microcycas calocoma*), considerado «fósil» viviente de la paleoflora del cretácico por mantener los caracteres reproductivos de las plantas de este período. En los matorrales de las paredes verticales de los mogotes existen tres vegetales endémicos de gran relevancia (*Bombacopsis cunebssis*, *Spathelia brittonii* y *Gaussia princeps*), llamados trílogía de mogotes (Alain, 1960), ya que pueden ser observados a simple vista. Se manifiesta además la presencia de 57 especies medicinales, de ellas 17 endémicas, Fuentes (1984).

El atractivo de la vegetación y la flora es evidente, por ser bosques tropicales que no se corresponden con su altura y su talla a las de otras regiones del mundo, debido fundamentalmente al sustrato, como por el endemismo existente, lo cual es único de los ecosistemas cársticos de los mogotes de Pinar del Río.

2.1.7. Fauna

La fauna cubana no es rica en mamíferos de gran talla, pero presenta una gran riqueza en grupos faunísticos de pequeño tamaño, entre los que se destaca las aves, los moluscos, los reptiles y anfibios, además de arácnidos e insectos.

Las aves son el grupo más carismático, a pesar de la no existencia de endemismo local, no obstante se pueden observar durante el año cerca de 56 especies, la mayoría endémicos cubanos a nivel de especie o subespecie; entre estas se destacan: tocororo, cartacuba, mayito, tomeguín del pinar, sijú cotunto, y muchos otros. Los moluscos son el grupo mejor representado y con alto valor, ya que más del 90% son endémicos de esta región, entre

ellos: las *Vianas*, conocidas como las princesas de la malacofauna cubana por la belleza de las conchas y la gran variabilidad de sus morfos, la *Zachrysis guanensis* por su tamaño, las oleacinas, único representante de los carnívoros, etc. (comunicación personal de Luis⁵ y Novo⁶, 2003).

También hay un alto porcentaje de endemismo entre los reptiles, principalmente entre las especies de lagartos, donde se destacan: *Anolis barschi* y *Chamaeliolis chamaelionides*. Otras especies que abundan en la zona son: el majá de Santa María, culebrita y el jubo. Entre los anfibios se destaca el gran sapo de muesca de occidente y el tolín. Existen múltiples insectos, entre los principales se encuentran: la abeja de la tierra, avispa, mariposas, y las *Macromiscas*, hormigas de color verde metálico de gran vistosidad y las bibijaguas. Los mamíferos son escasos, pero se cuenta con jutías, arbóricolas y de rocas, y murciélagos, donde se destacan el *Phyllonictes poeyii* y el *Artibeus jamaicensis*, el primero por vivir en colonias muy densas y aumentar la temperatura de las cuevas y el segundo por ser de color claro y alimentarse de frutas (comunicación personal, Luis y Novo, 2003).

Es de destacar la presencia en los ríos y arroyos de la subespecie cubana jicotea, la cual es bastante escasa y se encuentra amenazada; además un crustáceo típico aunque no endémico, el langostino de río, el cual es muy apreciado por los habitantes locales, por lo exquisita de su carne y la forma de su captura.

La fauna es uno de los componentes del medio que más se afecta con las modificaciones de otras variables, siendo decisiva la vegetación. Es por ello que en los mogotes es donde mayor población y diversidad de especies existe, mientras que en las Alturas de Pizarras abundan fundamentalmente las aves, y en el valle (principalmente en las márgenes de ríos y arroyos) es donde se observa una fauna más numerosa, DPPF (1999).

El atractivo de la fauna es indiscutible, por la existencia de grupos muy numerosos, el colorido de las aves y la singularidad del endemismo.

2.1.8. Paisajes

La unidad básica de este recurso, tomando en consideración los criterios geocológicos, se clasifica en tres grupos de paisajes naturales: serranías calcáreas, alturas de pizarras y llanuras altas o depresiones en forma de poljas, dolinas y valles, Luis et alii (1993).

El atractivo de este recurso es evidente, si se parte de que el paisaje natural tiene múltiples atracciones en cada uno de los componentes de la envoltura geográfica, pues en su conjunto brinda la singularidad esceno estética, expresada a través de su unicidad. En otros lugares del mundo pueden observarse elevaciones mogotoideas, como es el caso de China y Vietnam, pero no presentan las cualidades de este, desde el punto de vista de su historia geológica. Además de lo expuesto se debe añadir la existencia de diferentes planos que permiten la visión de un conjunto de valles (Viñales, Cuevita de Ancón, Quemado y Santo Tomás) que ofrecen un atractivo singular.

El especialista que viene en busca de una parte del paisaje o componente le resulta primordial y halagador contemplar el conjunto aunque no haya sido el interés inicial. Los

5 Luis, M. (2003): Dr. en Geografía y especialista ambiental del Parque Nacional Viñales.

6 Novo, R. (2003): Especialista ambiental del Parque Nacional Viñales.

diferentes tonos de rojos de sus suelos, con el contraste de verdes de la vegetación, junto a la diversidad de matices grises, ocre, amarillos de las rocas, donde aparecen desnudas, hacen que el visitante manifieste su admiración ante el efecto que produce el conjunto paisajístico.

2.1.9. Valoración de los recursos naturales turísticos

A partir de la existencia de una amplia gama de recursos naturales turísticos con que cuenta la región, descritos en los epígrafes anteriores, se realiza una ponderación de los mismos, utilizando como información de base los resultados de las entrevistas que se realizaron a 14 graduados universitarios que trabajan directamente con los turistas en el desempeño de diferentes actividades y que cuentan con una experiencia aproximada de 5 años. En el empleo de esta técnica, cada uno de ellos planteó, de forma individual, la percepción que tienen de la importancia que le otorgan los clientes a los recursos naturales, en una escala ascendente de valores comprendida entre 1 y 3. Los resultados que se obtienen se muestran en la tabla 1.

Tabla 1
MATRIZ DE VALORACIÓN DE RECURSOS NATURALES TURÍSTICOS

Rec.	Especialistas														T	Ivr
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14		
R	3	3	3	3	3	3	3	3	1	3	2	3	3	3	39	0.15
G	3	2	1	3	2	3	2	3	1	1	2	2	2	1	28	0.11
S	3	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	1	1	1	21	0.08
H	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	22	0.09
Cl	2	1	3	1	1	3	1	1	2	2	3	1	2	1	24	0.10
V	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	42	0.16
F	3	3	3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	3	40	0.15
P	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	42	0.16
Total															258	1.00

Fuente: Elaboración propia.

Leyenda:

R: relieve; G: geología; S: suelo; H: hidrología; Cl: clima; V: vegetación y flora; F: fauna; P: paisaje
Rec: recurso; T: total; Ivr: índice de valor relativo = total por cada recurso/total general.

Respecto a los resultados de la tabla 1 se puede apreciar que los recursos naturales de mayor significación para los clientes, según la opinión de diferentes especialistas son: paisaje, vegetación y flora, fauna y relieve. Esta ponderación tiene una significación desde el punto de vista ambiental y ético y su utilidad práctica es indiscutible en el diseño de actividades turísticas rurales.

3. PATRIMONIO TURÍSTICO DE VIÑALES

En el proceso de diagnóstico de la actividad turística es importante tener en cuenta, además de los atractivos, las restantes partes (planta turística, la infraestructura, y la superestructura), que conforman el patrimonio turístico de un país, pues la carencia de algunas de ellas afecta al resto y conduce a una descripción incompleta, Burkart y Medlik (1981); Bordas y Araya (1989); Moutinho (1995); Ashworth y Voogd (1993); Calantone y Mazanec (1991); Haan et alii (1993); Heath y Wall (1992); Calver y Teare (1995).

Partiendo de la opinión anterior, se tomaron en cuenta para el análisis de la situación actual del turismo en la región, la observación de aquellos componentes que forman el patrimonio turístico de un país, según Boulón (1990), y cuya descripción se ofrece en la tabla 2.

La cuantificación de los elementos del inventario que conforman el patrimonio turístico de Viñales requiere un conjunto de observaciones, que se señalan a continuación:

- La cuarta parte denominada superestructura incluye además de las entidades que se relacionan en la tabla 2, un grupo de organismos a nivel territorial y local que apoyan la actividad turística de la zona, como son: Delegación Territorial de la Agricultura y sus correspondientes empresas forestales, Cuerpo de guardabosques, Ministerio de las Fuerzas Armadas (MINFAR), Ministerio de Ciencia Tecnología y Medio Ambiente (CITMA), Artex, y Organizaciones políticas y de masas.
- En los servicios de alimentación, esparcimiento y comunicación no se incluyen los que poseen los hoteles.
- Los servicios de comunicación, sanidad y determinados autobuses pueden ser utilizados tanto por los turistas como por los residentes locales.
- Existen servicios que sólo pueden ser utilizados por el turista internacional, como son: agencias de alquiler de coches y agencias de viajes.
- Los guías turísticos están capacitados fundamentalmente en las categorías de senderismo y caminata.
- El 87% de la disponibilidad habitacional en los hoteles está dirigida hacia el turismo internacional (Delegación Territorial del MINTUR, 1999).
- El disfrute de los diferentes elementos que conforman el patrimonio debe ser pagado por los turistas internacionales en dólar norteamericano.
- En el cómputo de las explotaciones agrícolas se dan diferentes formas de producción como son: cooperativas de producción agropecuaria (CPA) y las cooperativas de crédito y servicio (CCS).
- La actividad extrahotelera está enfocada a apoyar la esfera de los servicios gastronómicos.
- El total de habitaciones de las casas particulares es aproximadamente superior a la de los hoteles en 79 habitaciones.

Tabla 2
RELACIONES DE COMPONENTES DEL PATRIMONIO
TURÍSTICO DE VIÑALES

Clasificación	Cantidad	En uso		Vocación
		Si	No	
Atractivo turístico				
Cueva	12	5	7	Espeleológica, Cultural y Arqueológica
Caverna	1	1		Espeleología
Valle	3	2	1	Paisaje
Especie vegetal	1	1		Paisaje
Río	2		2	Paisaje
Manantiales	1	1		Salud
Jardín	1	1		Cultural
Punto geológico	3		3	Geológica y Cultural
Escuela de espeleología	1	1		Espeleológica
Plaza	1	1		Cultural
Mural de la prehistoria	1	1		Cultural
Comunidad	1		1	Cultural
Monumento	1		1	Histórico
Punto de observación	1		1	Histórico
Museo	2	1	1	Cultural
Galería de arte	1	1		Cultural
Fiestas religiosas	3	3		Cultural
Evento	1	1		Cultural
Explotaciones agrícolas (total)	30		30	Visitas especializadas
CPA	5		5	
CCS	25		25	
Centros científicos y técnicos	1		1	Visitas especializadas
Planta Turística				
Hotel	3	3		Alojamiento
Casas particulares	261	261		Alojamiento
Campings	1	1		Alojamiento
Restaurantes	7	7		Alimentación
Cafeterías	6	6		Alimentación
Discotecas	2	2		Esparcimiento

Bar	9	9		Esparcimiento
Cine	1	1		Esparcimiento
Centros deportivos	1	1		Esparcimiento
Agencia de viajes	4	4		Otros servicios
Guías turísticos	19	19		Otros servicios
Oficina de cambio de moneda	1	1		Otros servicios
Agencia de coche	3	3		Otros servicios
Mirador	1	1		Paisaje
Infraestructura				
Terminal de autobuses	1	1		Transporte
Servicio de autobús	5	5		Transporte
Servicio de correo	1	1		Comunicación
Servicio de Internet	1	1		Comunicación
Servicio telefónico	1	1		Comunicación
Policlínica	1	1		Sanidad
Consultorio médico (total)	18	18		Sanidad
Urbanos	9	9		
Rurales	9	9		Energía
Gasolinera	1	1		
Superestructura (directa)				
Cadena hotelera, Horizontes	1	1		Alojamiento
Cadena extrahotelera, Rumbos	1	1		Servicios
Cadena de tiendas	3	3		Servicios

Fuente: Dirección Provincial de Planificación Física (1999) y Delegación Territorial del MINTUR (2000).

Es notable, además de los elementos que se han expuesto anteriormente, la presencia en la zona de Viñales de una arquitectura local caracterizada por Castillo⁷ y Castellanos⁸ (2002), comunicación personal, en dos vertientes:

- 1 Urbana: está dada por los numerosos techos de teja criolla en edificaciones mayoritariamente de una sola planta, que son ejemplos de una arquitectura popular que asumió elementos de un tardío neoclasicismo, al cual de forma espontánea, se le fue incorporando las formas tradicionales de la arquitectura pinareña, como son los componentes de fachada con portales, columnas bajas de sección redonda, en algunos casos carentes de basamentos y cubiertas inclinadas que apoyan su sencilla

7 Castillo, L. G. (2002): arquitecto, director del departamento de turismo de la DPPF.

8 Castellanos, L. (2002): arquitecta de la DPPF.

estructura de madera y tejas directamente sobre escuetos capiteles dóricos. Desde el punto de vista urbano en el pueblo existe un solo espacio jerarquizado que es el parque o plaza central, alrededor del cual se concentra el comercio.

- 2 Campesina: la vivienda campesina tuvo su antítesis en la vivienda urbana, con la que actualmente coexiste. En el Valle aparecen tipologías arquitectónicas como:
 - el vara en tierra, construcción de muy bajo puntal, empleada para guardar instrumentos de trabajo y protegerse en tiempo de ciclón.
 - el bohío, típica vivienda campesina de techo de guano y paredes de tabla, a la que se añaden pequeñas construcciones de madera para efectuar la cocción de alimentos con leña, el almacenamiento de víveres, etc.
 - la casa de tabaco, amplia casona de puntales elevados y planta rectangular que se emplea para el curado de la hoja del tabaco; generalmente su cubierta y paredes son de guano y la estructura, de madera rústica.

A partir de lo que se analiza en este epígrafe, los autores opinan que es importante ampliar el patrimonio turístico hacia otros elementos autóctonos que conforman la herencia etno-cultural de la región, dada la importancia que tiene para el turismo rural.

4. PATRIMONIO ETNO-CULTURAL DE VIÑALES

El inventario de las costumbres y tradiciones locales arraigadas en la comunidad, y su posterior gestión, constituyen un elemento clave en la introducción del turismo rural, ya que combinadas con otras actividades marcan la oferta de esta modalidad.

De acuerdo con entrevistas realizadas a cinco familias campesinas⁹, así como 3 especialistas¹⁰ en interpretación y manejo ambiental, se puede constatar una serie de elementos, dentro del patrimonio etno-cultural, que resultan de interés para el turista. Para una mejor comprensión de estos elementos puede consultarse el glosario que se ofrece en Camargo (2003). A continuación se listan los mismos:

- Tradición campesina de oralidad manifiesta a través de diferentes formas (leyendas, mitos y cuentos), inspirados por el entorno natural que los rodea.
- Predicción de eventos meteorológicos a partir de manifestaciones singulares de la naturaleza.
- El desempeño de la mujer campesina como ama de casa en tareas tales como: el cuidado de los animales de corral, conservación del jardín, actividades artesanales (cestería con fibra vegetal, especialmente con el bejuco del guaniquiqui, trabajos con semillas, y confección de muñecas de trapo).
- Las actividades del hombre, en cuanto al cuidado de los árboles frutales.
- Forma peculiar de vestir del guajiro, destacándose en el cinturón la presencia del machete y el cuchillo; las polainas y el sombrero de guano.

9 Familias de campesinos entrevistados: Barrio la Penitencia (Vázquez), Dos Hermanas (Morales), Entronque Ancón (González), Capón (Ramos y Rodríguez).

10 Especialistas en manejo e interpretación ambiental: Novo, R.; Luis, M. y Baceiro, A.

- La cría y entrenamiento de gallos de *Lidia*.
- Celebración de actividades familiares (guateques), donde se mezcla la música campesina con su peculiar estilo de canto (punto libre), con las comidas típicas.
- Utilización de muebles con diferentes fines, entre los que se encuentran: el mortero o pilón de arroz y café, aventadero, molino de granos, piedra de filtrar agua, excusabaraja, taburete, catauro, pipa de agua, escoba de palmiche, lámpara de luz brillante y fogón de leña.
- Empleo de los portales, como un lugar de la casa acogedor, para el descanso y el intercambio con los vecinos.
- Muestra de un patrimonio vernáculo, que se ve matizado por los diversos colores de la pintura exterior en las viviendas.
- Coincidencia de diferentes cultivos en una misma zona, como el tabaco, café y viandas.
- Utilización de la tracción animal para las labores agrarias.
- Empleo de instrumentos propios de las actividades agrícolas como el arado de madera o criollo y el americano, así como la grada o peine.
- Actividad de manejo de animales como es el caso del ordeño de vacas.
- Uso del bosque para la cría del ganado porcino debido a la presencia de encino o roble cubano cuyos frutos sirven de alimento.
- Empleo de la medicina verde, a partir de las tradiciones heredadas de sus antepasados, utilizando las propiedades curativas de las plantas.
- Degustación de alimentos (harina de maíz seco, *congrí*, carne de cerdo conservada en la grasa del propio animal, ajíaco y chicharrones) cocidos en la cocina de leña.
- Tradición de elaborar dulces de frutas en almíbar, principalmente la que proviene del coco.
- Confección de licores de forma artesanal utilizando los frutos del bosque, destacándose la guayabita del pinar.

La incorporación de los elementos citados anteriormente en el producto turístico debe realizarse con un alto grado de autenticidad, porque a pesar de que, los turistas viajan para pasar unos días mezclados con la población local, haciendo lo que ven, comiendo lo que ellos comen, es decir, «*vivenciando la experiencia*», Buckles, et alii (2000), no se puede «montar», el cliente lo intuye, se da cuenta y se siente manipulado y entonces la experiencia montada ahuyenta el turismo.

Las personas entrevistadas que opinaron acerca de lo que les interesa constatar a los turistas en esta región de estudio coinciden, al igual que los autores, en que la presencia de estos elementos, correctamente utilizados, pueden aportar atributos de importancia en el producto turístico Viñales, enfocado hacia la modalidad rural, ya que muestran las raíces más autóctonas de las formas de vida tradicional campesina. Todo lo anterior reafirma la definición de turismo rural elaborada por Camargo (2003), donde el rescate de la identidad de la localidad cobra validez a través del reconocimiento de quienes la visitan, con un interés marcado hacia aquellos elementos desconocidos que no se encuentran en el entorno donde cotidianamente viven, si se tiene en cuenta las características de la demanda que practica este tipo de turismo, Camargo (2003).

5. CONCLUSIONES

Los recursos naturales de mayor relevancia para los clientes internacionales, en la zona objeto de estudio, según la opinión de varios especialistas del turismo, son: paisaje, vegetación y flora, fauna y relieve, los cuales deben tenerse en cuenta de manera priorizada en el diseño de actividades turísticas para la modalidad rural.

La búsqueda de aquellos elementos que conforman el patrimonio etno-cultural y que resultan relevantes para los visitantes, según la opinión de varias familias campesinas y especialistas del turismo, permite realizar una selección de aquellos que le otorgan un sello que distingue el turismo rural, de una zona y de otra, bajo los mismos preceptos, realizado a través del reconocimiento de los visitantes que asisten al lugar y donde los pobladores deben tener conciencia de la importancia que tiene el mismo, para alcanzar un desarrollo turístico local.

BIBLIOGRAFÍA

- ACEVEDO, M. (1992): *Geografía Física de Cuba*. Primera reimpresión. Tomo II. La Habana, Cuba. Editorial Pueblo y Educación. 389 p.
- ACEVEDO, M. (1980): *Geografía Física de Cuba*. Tomo I. La Habana, Cuba. Editorial Pueblo y Educación. 313 p.
- ASHWORTH, G. et al. (1993): *Can Places be Sold for Tourism?*, Marketing Tourism Places. Ediciones Asworth, G. and Goodall, B. Wiltshire. Editorial Routledge.
- BORDAS, E. et al (1989): «Los Planes de Marketing Turísticos: La Nueva Herramienta Clave para el Desarrollo», *Revista Valenciana d'Estudis Autònomic*, n° 13 pp. 39-74.
- BOULÓN, R. C. (1990): *Planificación del Espacio Turístico*. 2ª ed. D.F. México. Editorial Trillas Turismo.
- BUCKLES, D. et al (2000): *Gestión de recursos naturales. América Latina y el Caribe. Prospectiva 2000 – 2004*. Centro Internacional de Investigaciones para el Desarrollo. Oficina Regional para América Latina y el Caribe. Montevideo, Uruguay [en línea] agosto 2000. Disponible en: http://www.idrc.ca/minga/index_s.html [Consulta: 1 de abril 2001].
- BURKART, A. J. et al (1981): *Tourism - Past, Present and Future*. Heinemann, London.
- CALANTONE, J. R. et al (1991): «Marketing Management and Tourism», *Journal Annals of Tourism Research*, n° 18, pp. 101-119.
- CALVER, S. et al (1995): *Marketing Strategies - Hospitality, Tourism Marketing and Management Handbook*. Ediciones Witt, S. F. and Moutinho, L. Prentice Hall International.
- CAMARGO, I. A. (2003): *Aportaciones metodológicas para la implementación del turismo rural en la República de Cuba. Estudio de caso: zona turística de Viñales. Pinar del Río*, Ed. Universidad de Alicante. España.
- CAPOTE et al, (1984). Delegación Territorial del MINTUR. (2000). Estadísticas del MINTUR. Pinar del Río, Cuba. 16 p.
- Dirección Provincial de Planificación Física. (1999). Plan de ordenamiento territorial del polo turístico de Viñales. p. 5- 10.

- FUENTES, V. (1984): «Sobre la flora medicinal en Cuba», *Boletín de reseña de Plantas Medicinales*, Ministerio de la Agricultura (CU) pp. 2-39.
- GONZÁLEZ, I. (1988): «El uso racional de los Recursos Hídricos y su influencia en la Transformación del Medio Geográfico en Cuba», en *Ponencia del I Taller Internacional Transformación del Medio Geográfico en Cuba*. La Habana. pp. 121-135.
- GUTIÉRREZ, R. (1994): «Características Geológicas y Geomorfológicas de la Cordillera de Guaniguanico», en *Actas del Congreso Internacional de Espeleología*. España. pp. 93-96.
- HAAN, T. et al (1993): *The Tourist Destination as Product: The Case of Languedoc. Marketing Tourism Places*. Ediciones Asworth, G. and Goodall, B. Editorial Wiltshire: Routledge.
- HEATH et al (1992): *Marketing Tourism Destinations. A Strategic Planning Approach*. John Wile & Sons, INC.
- LOPETEGUI, C. M. et al (1996): *Caracterización climática del municipio Viñales*. Pinar del Río, Cuba. 36 p.
- LUIS, M. (2001): *Evaluación para la protección de los mogotes de la Sierra de los Organos y el Pan de Guajaibón*. La Habana. Ed. Universidad de la Habana.
- LUIS, M. et al (1993): «Clasificación tipológica de los paisajes cársicos de los mogotes de la Sierra de los Órganos y el Pan de Guajaibón, Provincia de Pinar del Río», *Departamento de Geografía*, ISP Pinar del Río Inédito. 24 p.
- MARRERO, L. (1955): *Geografía de Cuba*. 2ª ed. La Habana. Talleres tipográficos Alba. 736 p.
- MATEO, J. (2000). *Geografía de los Paisajes*. Universidad de La Habana, Cuba. p. 7- 10.
- MINISTERIO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA Y MEDIO AMBIENTE (1997). Declaratoria Valle de Viñales de Área Protegida bajo la categoría de Parque Nacional. Resolución nº 36.
- MINISTERIO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA Y MEDIO AMBIENTE (2003). Plan de ordenación del Parque Nacional Viñales. 36 p.
- MOUTINHO, L. (1985): *Positioning Strategies. Tourism Marketing and Management Handbook*. Witt, S. F. and Moutinho, L. (eds). Prentice Hall International.
- NÚÑEZ, A. et al. (1984): *Cuevas y Carsos*. La Habana. Impresora Militar. p. 45- 50.
- NÚÑEZ, A. et al. (1959): *Geografía de Cuba*. La Habana. Editorial Lex. 624 p.
- SALINAS, E. y MUNDET CERDAN, LL. (2000): “El turismo en Cuba. Un análisis geográfico.”, *Revista Geographicalia*, España, enero pp. 53- 66.
- VERA, J. F. et al (1997): *Análisis territorial del turismo*. Barcelona, España. Editorial Ariel Geografía. pp. 7- 138.
- UNESCO. (1999). Declaratoria de Paisaje Cultural del Patrimonio de la Humanidad. XXIII Sesión del Comité de Patrimonio Mundial. 29 nov. al 4 de dic. Marrakesh, Marruecos.

Agradecimientos

Los autores agradecen al profesor Javier Esparcia Pérez, del Departamento de Geografía de la Universidad de Valencia, su inestimable ayuda en la elaboración del presente trabajo.

THE NEVANLINNA THEOREM OF THE CLASSICAL THEORY OF MOMENTS REVISITED

M. URREA, I. M. TKACHENKO and P. FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA

Received March 31, 1999 and, in revised form, March 16, 2001

Abstract. The canonical solutions of the truncated Hamburger moment problem (both in the classical and degenerate cases) are found. The Nevanlinna theorem which provides the noncanonical solutions of the truncated Hamburger problem is also rederived in the framework of the operator approach.

1. Introduction

Over a century ago Stieltjes published a work [13] which initiated the development of the theory of moments. Stieltjes even managed to solve the problem of finding a nondecreasing function of bounded variation, $\sigma(t)$, $t \in [0, +\infty)$ with given moments $\mu_k = \int_0^{+\infty} t^k d\sigma(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ connecting

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 30E05, 30E10; Secondary 82C70, 82D10.

Key words and phrases. Power moments, Nevanlinna's theorem, operator approach.

The work was partially financed by the Institució Valenciana d'Estudis i Investigació (I.V.E.I.) (grant No. 024-94). The financial support of the Polytechnic University of Valencia is also acknowledged.

certain continued fractions with the Cauchy-type integral

$$\int_0^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t+z}.$$

Though many results on the moment problem perhaps look now like “folklore”, it is worth-while to reformulate or rederive some of them especially those for the truncated problems where only a finite set of moments is given [8], [9]. Such rederivation from the position of modern applications appears to be fruitful for the trigonometric problem of moments (i.e. for the Carathéodory-class functions) application to digital signal processing and for some new topics in the operator theory or the probability theory (see for example [6] and references therein). Recently Curto and Fialkow ([4]) using a fine linear algebra technique to describe a recursive model for singular positive Hankel matrices have pointed out new elements even in such a guide-book tale as necessary and sufficient conditions for existence or uniqueness of positive Borel or finitely atomic measures which solve the truncated, including degenerate problems (i.e. problems with the singular Hankel matrix of moments) of Hamburger, Hausdorff and Stieltjes.

Here, we are interested in the problem of moments for the Nevanlinna-class functions \mathcal{N} (also named the Riesz-class functions, i.e. the class of analytical functions transforming the set $G_z = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ into $G_\omega = \{\omega \in \mathbb{C} : \text{Im}(\omega) \geq 0\}$, realized by the Riesz-Herglotz transformation), having in mind applications to the theory of orthogonal polynomials, the operator theory, ... even in the context of strongly coupled plasmas [1, 11].

The canonical solutions of the Hamburger moment problem [5] (both in the classical and degenerate cases) are found. The Nevanlinna theorem which provides the noncanonical solutions of the Hamburger problem is also rederived using the operator approach elaborated and briefly outlined for the moment problem in the renowned paper by M.G. Krein [7].

2. Canonical solutions of the truncated Hamburger problem

The Hamburger problem of the theory of moments [2, 9, 10, 12] is formulated in the following way:

Given a set of real numbers $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2n}\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, to find all distributions $\sigma(t)$ such that

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k d\sigma(t) = \mu_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n. \quad (2.1)$$

Theorem 2.1. *A system of real numbers $\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{2n}\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, admits the representation of equation (2.1) if and only if*

1. *The Hankel matrix $\Lambda_n = [\mu_{k+j}]_{k,j=0}^n$ is nonnegative;*
2. *For each vector $\xi = (\xi_j)_{j=0}^n \in \mathbb{C}^{n+1}$ with the component $\xi_n = 0$, the equalities*

$$(\Lambda_n \xi)_j = \sum_{k=0}^{n-1} \mu_{j+k} \xi_k = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (2.2)$$

imply

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu_{n+1+k} \xi_k = 0. \quad (2.3)$$

If in addition $\Lambda_n \geq 0$ is a singular matrix, then there is only one distribution which satisfies (2.1), and it is supported by a set of $s \leq n$ points.

Proof. Suppose that relations (2.1) hold.

For an arbitrary set $\{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ of complex numbers define

$$P(t) = \xi_0 + \xi_1 t + \xi_2 t^2 + \dots + \xi_n t^n,$$

then it follows from (2.1) that

$$(\Lambda_n \xi, \xi) \equiv \sum_{k,j=0}^n \mu_{k+j} \xi_k \bar{\xi}_j = \int_{-\infty}^{\infty} |P(t)|^2 d\sigma(t) \geq 0. \quad (2.4)$$

Hence the Hankel matrix $\Lambda_n = [\mu_{k+j}]_{k,j=0}^n$ is nonnegative.

If the Hankel matrix Λ_n is non-negative and

$$(\Lambda_n \xi, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} |P(t)|^2 d\sigma(t) = 0 \quad (2.5)$$

for the non-zero vector $\xi \in \mathbb{C}^{n+1}$ then the support of the distribution $d\sigma(t)$ belongs to the set $\{\alpha_j\}_{j=0}^s$, $s \leq n$ of real roots of the polynomial $P(t)$. Furthermore, it is evident that for vectors ζ_j to which correspond the polynomials

$$P_j(t) = \frac{\prod_{m \neq j}^s (t - \alpha_m)}{\prod_{m \neq j}^s (\alpha_j - \alpha_m)},$$

we have

$$(\Lambda_n \zeta_j, \zeta_j) = \int_{-\infty}^{\infty} |P_j(t)|^2 d\sigma(t) = \sigma(\alpha_j + 0) - \sigma(\alpha_j - 0).$$

Thus, since $P(t)$, and consequently $\{\alpha_j\}_{j=0}^s$, depend only and exclusively on the given moments $\{\mu_k\}_{k=0}^{2n}$, we conclude that only one distribution $d\sigma(t)$ can exist to satisfy (2.1), if $\Lambda_n \geq 0$ and (2.5) holds for some $\Lambda_n \neq 0$, and in addition this unique distribution is supported by $s \leq n$ points.

Recall that for any matrix (operator) $\Lambda_n \geq 0$ the equality $(\Lambda_n \xi, \xi) = 0$ holds if and only if $\Lambda_n \xi = 0$. For a vector $\xi \in \mathbb{C}^{n+1}$ with the coordinate $\xi_n = 0$ the equalities (2.2) mean that $\Lambda_n \xi = 0$. Taking a vector $\eta \in \mathbb{C}^{n+1}$ with $\eta_0 = 0; \eta_j = \xi_{j-1}, j = 1, \dots, n$, we see that $P(t) = tP(t)$, so that we have:

$$(\Lambda_n \eta, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} |P(t)|^2 d\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |P(t)|^2 d\sigma(t).$$

But the equality (2.5) for ξ forces

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |P(t)|^2 d\sigma(t) = 0.$$

Hence $(\Lambda_n \eta, \eta) = 0$ and, as follows, $\Lambda_n \eta = 0$. In particular $(\Lambda_n \xi)_n = 0$, i.e. (2.3) holds. To prove the sufficiency:

1. Assume first that the matrix $[\mu_{k+j}]_{k,j=0}^n$ is positive, i.e.,

$$\sum_{k,j=0}^n \mu_{k+j} \xi_k \bar{\xi}_j > 0 \tag{2.6}$$

for any vector ξ such that $\sum_{k=0}^n |\xi_k|^2 > 0$.

Construct a $(n + 1)$ -dimensional Hilbert space \mathcal{H} of vectors $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ taking the Hermitian form

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{k,j=0}^n \mu_{k+j} \xi_k \bar{\eta}_j \tag{2.7}$$

as a scalar product.

Denote by $\{\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n\}$ an orthonormal basis of the space \mathcal{H} obtained from the canonical basis $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ by the Gram-Schmidt procedure. Introduce a Hermitian operator A_0 in \mathcal{H} such that

$$A_0 \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1. \tag{2.8}$$

Since

$$\langle \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_j \rangle = \mu_{k+j+1} = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{j+1} \rangle \quad (2.9)$$

then for any two vectors $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \text{span}(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$

$$\langle A_0 \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \langle \boldsymbol{\xi}, A_0 \boldsymbol{\eta} \rangle. \quad (2.10)$$

Consider now the vectors $A_0 \mathbf{h}_j$ with $0 \leq j < n$. By definition \mathbf{h}_j is orthogonal to all vectors \mathbf{h}_i with $i < j$, and is a linear combination of the vectors \mathbf{e}_l with $l \leq j$. Hence, the vector $A_0 \mathbf{h}_j$ will be orthogonal to all vectors $\{\mathbf{h}_{j+2}, \dots, \mathbf{h}_n\}$, and due to the hermiticity condition (2.10), $A_0 \mathbf{h}_j$ is also orthogonal to all vectors $\{\mathbf{h}_0, \dots, \mathbf{h}_{j-2}\}$. Setting $\overline{b_{-1}} = 0$ we see that

$$A_0 \mathbf{h}_j = b_j \mathbf{h}_{j+1} + a_j \mathbf{h}_j + \overline{b_{j-1}} \mathbf{h}_{j-1}, \quad 0 \leq j \leq n-1. \quad (2.11)$$

Observe that the coefficients a_j in (2.11) are real.

Let us now extend A_0 to an operator A on the whole Hilbert space \mathcal{H} by relations:

$$A \mathbf{h}_j = \begin{cases} b_j \mathbf{h}_{j+1} + a_j \mathbf{h}_j + \overline{b_{j-1}} \mathbf{h}_{j-1} & \text{if } 0 \leq j \leq n-1, \\ a_n \mathbf{h}_n + b_{n-1} \mathbf{h}_{n-1} & \text{if } j = n, \end{cases} \quad (2.12)$$

where a_n is an arbitrary real number.

Notice that for the orthonormal basis $\{\mathbf{h}_0, \dots, \mathbf{h}_n\}$ the matrix of operator A is Hermitian. Therefore A is a self-adjoint operator and there exists a resolution of the identity \mathcal{E}_t such that for any $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{H}$

$$\langle A \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t \langle d\mathcal{E}_t \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle.$$

Consider now the following non-decreasing function

$$\sigma(t) = \langle \mathcal{E}_t \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.13)$$

of pure jumps. Since by construction

$$A^k \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

and

$$\begin{aligned} \mu_{j+k} &= \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle = \langle A^j \mathbf{e}_0, A^k \mathbf{e}_0 \rangle \\ &= \langle A^{j+k} \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t^{j+k} d\sigma(t). \end{aligned} \quad (2.14)$$

for any $j, k = 0, 1, \dots, n$ we see that μ_j are the moments of the distribution $d\sigma(t)$. All distributions $d\sigma(t)$ constructed in such a way will be called *canonical*.

2. Suppose now that there exist vectors $\xi = (\xi_k)_{k=0}^n \in \mathbb{C}^{n+1}$ such that

$$\sum_{k=0}^n |\xi_k|^2 > 0, \tag{2.15}$$

and

$$\sum_{j,k=0}^n \mu_{k+j} \xi_k \bar{\xi}_j = 0. \tag{2.16}$$

The vectors ξ satisfying (2.16) form a linear subspace $\mathcal{L} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Let us consider the factor space $\mathcal{F} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \mathcal{L}$ as a Hilbert space, where the scalar product of the classes $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ (generated by the vectors $\xi, \eta \in \mathbb{C}^{n+1}$) will be represented as $\langle\langle \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rangle\rangle$, and will be defined as the scalar product of their corresponding vectors in the degenerate Hilbert space \mathcal{H} , i.e., $\langle \xi, \eta \rangle$.

Let $\tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n \in \mathcal{F}$ be the classes corresponding to $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Note that

$$\tilde{\mathbf{e}}_n \in \text{span}(\tilde{\mathbf{e}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{n-1}). \tag{2.17}$$

In fact, since $\dim \mathcal{F} \leq n$ there is $\xi \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ such that $\sum_{i=0}^n \xi_i \tilde{\mathbf{e}}_i = 0$, i.e., $\xi \in \mathcal{L}$ and the assertion follows if $\xi_n \neq 0$. If $\xi_n = 0$, then $\eta = (0, \xi_0, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ by the assumption (2) of the theorem. If $\xi_{n-1} = 0$ we similarly get $(0, 0, \xi_0, \dots, \xi_{n-2}) \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ and after finitely many steps we get $(0, \dots, 0, \xi_0, \dots, \xi_{n-p}) \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$ with $\xi_{n-p} \neq 0$ but this shows that (2.17) holds.

The relations

$$B \tilde{\mathbf{e}}_k = \tilde{\mathbf{e}}_{k+1}, \quad k = 0, \dots, n-1, \tag{2.18}$$

define a linear operator in \mathcal{F} provided that

$$\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \tilde{\mathbf{e}}_i = 0 \quad \text{implies} \quad \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \tilde{\mathbf{e}}_{i+1} = 0.$$

But this follows from condition (2) of the theorem. By (2.17) and (2.18) B is uniquely defined also on the class $\tilde{\mathbf{e}}_n$. It is easy to see from (2.18) and the definition of the scalar product of \mathcal{F} that B is self-adjoint. Thus there is the identity resolution $\tilde{\mathcal{E}}_t$ associated with B such that for each class $\tilde{\xi} \in \mathcal{F}$ we have

$$B \tilde{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} t d\tilde{\mathcal{E}}_t \tilde{\xi}.$$

Taking now the nondecreasing function of bounded variation

$$\tilde{\sigma}(t) = \langle\langle \tilde{\mathcal{E}}_t \tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{e}}_0 \rangle\rangle, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.19}$$

we conclude that

$$\begin{aligned} \mu_{j+k} &= \langle\langle \tilde{\mathbf{e}}_j, \tilde{\mathbf{e}}_k \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{B}^j \tilde{\mathbf{e}}_0, \mathbf{B}^k \tilde{\mathbf{e}}_0 \rangle\rangle \\ &= \langle\langle \mathbf{B}^{j+k} \tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{e}}_0 \rangle\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} t^{j+k} d\tilde{\sigma}(t). \end{aligned} \tag{2.20}$$

The solution constructed in this way is the unique solution of the truncated Hamburger moment problem (2.1). It will also be called *canonical* like in the non-degenerate case. \square

3. Description of canonical solutions

We now apply the above operator arguments to obtain the description formula for the canonical solutions.

For an arbitrary canonical distribution $\sigma(t)$ consider the function

$$\Omega(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z}, \tag{3.1}$$

also representable as:

$$\Omega(z) = \langle\langle (\mathbf{A} - zI)^{-1} \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle\rangle, \tag{3.2}$$

I being the identity operator. Let us assume first that we deal with the non-degenerate case. Taking into account that \mathbf{A} is a self-adjoint operator in an $(n + 1)$ -dimensional space and relation (3.2) we see that $\Omega(z)$ is a rational function of the Nevanlinna class \mathcal{N} and

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{2n+1} \left\{ \Omega(z) + \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \dots + \frac{\mu_{2n-1}}{z^{2n}} \right\} = -\mu_{2n}, \tag{3.3}$$

uniformly in any angle $\delta \leq \arg(z) \leq \pi - \delta$, $0 < \delta < \pi$. Notice that the set of these functions for all canonical distributions $d\sigma(t)$ is parametrized by the real numbers a_n appearing in (2.12).

To obtain the corresponding description formula for all such $\Omega(z)$ let us find an appropriate explicit expression for the resolvent of operator \mathbf{A} . To this end observe that since the vectors

$$\mathbf{A}^j \mathbf{e}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} t^j d\mathcal{E}_t \mathbf{e}_0, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

form a basis of \mathcal{H} , any vector $\phi \in \mathcal{H}$ can be represented as

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) d\mathcal{E}_t \mathbf{e}_0, \tag{3.4}$$

where $\phi(t)$ is a polynomial of degree not higher than n . Thus, as usual, \mathcal{H} can be realized as a Hilbert space of functions, the elements of which are polynomials of a degree not higher than n , the scalar product being defined as

$$\langle \phi, \gamma \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \overline{\gamma(t)} d\sigma(t), \quad (3.5)$$

$\gamma(t)$ being also a polynomial of degree not higher than n . For such realizations the vectors $\{\mathbf{h}_0, \dots, \mathbf{h}_n\}$ transform into the system of orthogonal polynomials $\{h_0, \dots, h_n(t)\}$ with respect to the canonical distribution $d\sigma(t)$. Emphasize that these polynomials are the same for all canonical distributions.

Recall that if $\det \Lambda_n > 0$ then the orthogonal polynomials $h_j(z)$, $j = 0, 1, \dots, n$, obtained by the Gram-Schmidt procedure are

$$h_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \det \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

where

$$\Delta_j = \det \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_j \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_j & \mu_{j+1} & \cdots & \mu_{2j} \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

while $\Delta_{-1} = 1$ and $h_0(z) = \mu_0^{-1/2}$.

Consider for z , $\text{Im } z > 0$, and an arbitrary $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$ the equation

$$(A - zI)\mathbf{g} = \mathbf{f}. \quad (3.6)$$

Realizing \mathbf{f} and \mathbf{g} as polynomials $f(t), g(t)$ of degree not greater than n and representing $g(t)$ as the orthogonal sum

$$g(t) = g_0(t) + C h_n(t),$$

where $g_0(t)$ is a polynomial of degree not greater than $n - 1$ and C is a complex number, we can with help of (2.12) write (3.6) as the equality

$$(t - z)g_0(t) + C [(a_n - z)h_n(t) + b_{n-1}h_{n-1}(t)] = f(t). \quad (3.7)$$

For $t = z$, $\text{Im } z > 0$, (3.7) gives

$$C [(a_n - z)h_n(z) + b_{n-1}h_{n-1}(z)] = f(z). \quad (3.8)$$

Proposition 3.1. *For any parameter w with non-positive imaginary part the polynomial*

$$Q_w(t) = (w - t)h_n(t) + b_{n-1}h_{n-1}(t)$$

has no zeros in the open upper half-plane.

Proof. Observe that the equality $Q_w(z) = 0$, $\text{Im } z > 0$, would mean that the rational function

$$g(t) = \frac{Q_w(t)}{t - z}$$

actually is a polynomial of degree n . Let \mathbf{g} be the corresponding vector and consider the vector \mathbf{g}_0 , to which corresponds the non-zero polynomial

$$g_0(t) = \frac{Q_w(t)}{t - z} + h_n(t) = \frac{(w - z)h_n(t) + b_{n-1}h_{n-1}(t)}{t - z}, \quad (3.9)$$

which is of degree not greater than $n - 1$. Let the operator A_w be defined by formula (2.12) but with the parameter w instead of a_n . The matrix of the operator A_w for the orthonormal basis $\{\mathbf{h}_0, \dots, \mathbf{h}_n\}$ is either Hermitian (in the case $\text{Im } w = 0$) or it has non-positive imaginary part (in the case $\text{Im } w < 0$). In both cases the operator A_w has no eigenvalues with positive imaginary parts. But from (3.9) we get immediately that the polynomial corresponding to the vector $(A_w - z)\mathbf{g}$ equals identically to zero, i.e. that

$$(A_w - z)\mathbf{g} = 0,$$

a contradiction. □

Returning to equalities (3.7), (3.8) with account of Proposition 3.1 for $\text{Im } z > 0$ we obtain

$$C = \frac{f(z)}{(a_n - z)h_n(z) + b_{n-1}h_{n-1}(z)} \quad (3.10)$$

and

$$g(t) = \frac{f(t)}{t - z} - \frac{f(z)}{t - z} \frac{(a_n - z)h_n(t) + b_{n-1}h_{n-1}(t)}{(a_n - z)h_n(z) + b_{n-1}h_{n-1}(z)}. \quad (3.11)$$

In particular, for the polynomial $u(t)$ corresponding to the vector $(A - zI)^{-1}\mathbf{e}_0$, $e_0(t) \equiv 1$, we obtain

$$u(t) = \frac{(a_n - t)(h_n(t) - h_n(z)) + b_{n-1}(h_{n-1}(t) - h_{n-1}(z)) - (t - z)h_n(t)}{(t - z)[(a_n - z)h_n(z) + b_{n-1}h_{n-1}(z)]}. \quad (3.12)$$

In order to determine the function $\Omega(z)$, let us introduce in parallel with $\{h_0, \dots, h_n(t)\}$ the system of (second kind, or associate) polynomials:

$$k_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (h_j(t) - h_j(s)) \frac{d\sigma(s)}{t-s}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (3.13)$$

Making use of (3.2), (3.5) and taking into account that

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t) d\sigma(t) = 0,$$

we get

$$\begin{aligned} \Omega_{a_n}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{a_n}(t)}{t-z} \\ &= -\frac{(a_n - z)k_n(z) + b_{n-1}k_{n-1}(z)}{(a_n - z)h_n(z) + b_{n-1}h_{n-1}(z)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

with a_n being an arbitrary real number.

Further, if all the moments up to the $2(n+1)$ -th were known and the corresponding Hankel matrix were positive, we could rewrite the last formula for $n \rightarrow n+1$ (one should amplify the sequence of moments keeping it positive) and introduce the polynomial $h_{n+1}(t)$ in a way that the following relation would be valid:

$$th_n(t) = b_n h_{n+1}(t) + \hat{a}_n h_n(t) + b_{n-1} h_{n-1}(t),$$

where

$$\hat{a}_n = \int_{-\infty}^{\infty} t |h_n(t)|^2 d\sigma(t).$$

Then, instead of (3.14), one would get

$$\Omega(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z} = -\frac{k_{n+1}(z) + \nu k_n(z)}{h_{n+1}(z) + \nu h_n(z)} \quad (3.15)$$

where

$$\nu = \frac{\hat{a}_n - a_n}{b_n}$$

is an arbitrary real constant, and $\sigma_\nu(t)$ possesses not more than $n+1$ points of growth. Thus *the formula (3.14) or the equivalent formula (3.15) give all canonical solutions of the truncated Hamburger moment problem in the non-degenerate case while the real parameter a_n or the real parameter ν , respectively, run through the real axis.*

To obtain the formula for $\Omega(z)$ in the degenerate case without loss of generality we can assume that

$$\text{rank } \Lambda_n = n. \tag{3.16}$$

Otherwise we might ignore some last moments and consider a Hankel matrix $\Lambda_{n'} = (\mu_{j+k})_{j,k=0}^{n'}$ with $n' < n$, for which

$$\text{rank } \Lambda_{n'} = n'.$$

By (3.16) there is only one (up to a multiple) non-zero vector ξ_0 such that $\Lambda_n \xi_0 = 0$ and condition 2 of Theorem 2.1 together with (3.16) provide that for this vector $\xi_n \neq 0$. As follows, for this vector the corresponding polynomial $d(t) \equiv P_0(t)$ has exactly degree n . In the space of polynomials \mathfrak{P}_n of degree not more than n corresponding to vectors of the space \mathbb{C}^{n+1} the polynomials corresponding the one-dimensional subspace \mathcal{L} form the one-dimensional space $\{\alpha d(t)\}$, where α runs the set of complex numbers \mathbb{C} . Classes of polynomials corresponding to elements \mathbf{f} of the factors space $\mathcal{F} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \mathcal{L}$ from \mathfrak{P}_n can be represented in the form $f(t) + \{\alpha d(t)\}$, where $f(t)$ is a polynomial of degree not more than $n - 1$. Consider for $z, \text{Im } z > 0$, and an arbitrary $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$ the equation

$$(B - z)\mathbf{g} = \mathbf{f} \tag{3.17}$$

where B is the self-adjoint operator in \mathcal{F} defined by (2.18). For the polynomial $g(t)$ of degree $\leq n - 1$ representing the class of polynomials corresponding to \mathbf{g} , (3.17) transforms into equation

$$(t - z)g(t) = f(t) + \alpha d(t), \tag{3.18}$$

where $f(t)$ is the polynomial of degree $\leq n - 1$ representing \mathbf{f} . For (3.18) would give as the solution a polynomial of degree $\leq n - 1$ the coefficient α in the right hand side of (3.18) must be equal to

$$-\frac{f(z)}{d(z)}.$$

As in the proof of Proposition 2.2 we can verify that the suggestion that $d(z)$ has complex leads to the absurd conclusion that the self-adjoint operator B has complex eigenvalues. Therefore,

$$g(t) = \frac{f(t)d(z) - f(z)d(t)}{(t - z)d(z)}.$$

In particular, for the case $\mathbf{f} = \tilde{\mathbf{e}}_0$ the corresponding representing polynomial of degree $\leq n - 1$ is $e_0(t) \equiv 1$ we obtain that

$$g(t) = \frac{1}{d(z)} \frac{d(z) - d(t)}{t - z}.$$

Setting

$$e(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(t) - d(z)}{t - z} d\sigma(t),$$

where $d\sigma(t)$ is the unique solution of the truncated Hamburger moment problem for the degenerate case, we conclude that $d\sigma(t)$ can be calculated immediately by poles and corresponding residues at them of the rational function

$$\Omega(z) = \langle\langle (B - z)^{-1} \tilde{\mathbf{e}}_0, \tilde{\mathbf{e}}_0 \rangle\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - z} = \frac{e(z)}{d(z)}.$$

4. Non-canonical solutions of Hamburger's problem: Nevanlinna's theorem

Hereafter the matrix Λ_n is considered to be strictly positive. In this case formula (3.15) evidently *establishes a one-to one correspondence between the set of all real numbers and the subset of all canonical solutions of the truncated Hamburger moment problem*. In this section applying as above the operator approach to the moment problem we show that (3.15) is a particular case of the general Nevanlinna formula giving description of both canonical and non-canonical solutions of that problem.

To this end note that each self-adjoint extension A of A_0 in the space \mathcal{H} or a defined on a larger self-adjoint extension of A_0 Hilbert space \mathcal{G} generates by formulas (3.1), (3.2) some solution $\sigma(t)$ of the truncated Hamburger problem. On the other hand it follows from the above constructions that each solution $\sigma(t)$ of this problem generates some self-adjoint extension A of A_0 , which is unitary equivalent to the natural extension of the symmetric operator of multiplication by the independent variable t from the subspace \mathfrak{P}_n of polynomials of degree $\leq n$ in the standardly defined space \mathbf{L}_σ^2 to the multiplication operator on t in the whole space \mathbf{L}_σ^2 . To obtain the complete description of all solutions of the truncated Hamburger problem starting from (3.1), (3.2) it is natural to use the M.G. Krein formula for the generalized resolvent [7], [3].

Let A_1 be some self-adjoint extension of A_0 in \mathcal{H} and let \widehat{A} be an arbitrary self-adjoint extension of A_0 acting in the Hilbert space \mathcal{G} , $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$. We keep for the extension of the scalar product of the space \mathcal{H} onto the space \mathcal{G} the same symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Note that in our special case A_0 and A_1 as operators acting in a finite dimensional space are bounded and the vector $\mathbf{h}_n \in \mathcal{H}$ introduced above is orthogonal to the domain of the symmetric operator

A_0 . Then for arbitrary $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{H}$ and any z , $\text{Im } z > 0$, the M.G. Krein formula is valid

$$\begin{aligned} \langle (\widehat{A} - z)^{-1} \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle &= \langle (A_1 - z)^{-1} \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \\ &- \frac{\langle (A_1 - z)^{-1} \mathbf{f}, \mathbf{h}_n \rangle \langle (A_1 - z)^{-1} \mathbf{h}_n, \mathbf{g} \rangle}{\langle (A_1 - z)^{-1} \mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n \rangle + \tau(z)}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

where $\tau(z)$ is some Nevanlinna function depending only on the extensions \widehat{A} , A_1 but not on the choice of vectors $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{H}$. *The M.G. Krein formula (4.1) establishes the one-to-one correspondence between the set of generalized resolvents of all self-adjoint extensions of the symmetric operator A_0 and the set of all Nevanlinna functions, holomorphic in the upper half-plane.*

By the connection between solutions of the truncated Hamburger moment problem and self-adjoint extensions of A_0 and the M.G. Krein formula (4.1), the set of functions

$$\Omega(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z},$$

where non-decreasing functions $\sigma(t)$ run through the set of all solutions of the truncated Hamburger moment problem, coincide with the set of functions

$$\begin{aligned} \Omega(z) &= \langle (A_1 - z)^{-1} \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 \rangle \\ &- \frac{\langle (A_1 - z)^{-1} \mathbf{e}_0, \mathbf{h}_n \rangle \langle (A_1 - z)^{-1} \mathbf{h}_n, \mathbf{e}_0 \rangle}{\langle (A_1 - z)^{-1} \mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n \rangle + \tau(z)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

where $\tau(z)$ runs through the set of all Nevanlinna functions in the upper half-plane. Rather simple calculations using explicit representations (3.11), (3.12) of $(A_1 - z)^{-1}$ in the space of polynomials \mathfrak{P}_n yield in addition to (3.14)

$$\langle (A_1 - z)^{-1} \mathbf{e}_0, \mathbf{h}_n \rangle = [(a_{n1} - z)h_n(z) + b_{n-1}h_{n-1}(z)]^{-1}, \quad (4.3)$$

$$\langle (A_1 - z)^{-1} \mathbf{h}_n, \mathbf{h}_n \rangle = [(a_{n1} - z)h_n(z) + b_{n-1}h_{n-1}(z)]^{-1} h_n(z), \quad (4.4)$$

where a_{n1} is the parameter in (2.12) for the canonical extension A_1 . Further elementary calculations with account of the last relations results in the following formula

$$\begin{aligned} \Omega_w(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z} d\sigma_w(t) = -\frac{(w(z) - z)k_n(z) + b_{n-1}k_{n-1}(z)}{(w(z) - z)h_n(z) + b_{n-1}h_{n-1}(z)}, \\ w(z) &= a_{n1} + \frac{1}{\tau(z)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Evidently $w(z)$ (4.5) is a Nevanlinna function in the upper half-plane. By construction $-\Omega_w(z)$ is also such function. Taking arbitrary canonical solution $d\sigma_\nu(t)$ consider the difference between the corresponding function $\Omega_\nu(z)$ and $\Omega_w(z)$. Applying the Christoffel identity for the orthogonal polynomials

$$k_n(z)h_{n-1}(z) - k_{n-1}(z)h_n(z) \equiv \frac{\Delta_{n-1}}{\sqrt{\Delta_n\Delta_{n-2}}}$$

we see that

$$\begin{aligned} \Omega_w(z) - \Omega_\nu(z) & \tag{4.6} \\ &= \frac{\nu - w(z)}{((w(z) - z)h_n(z) + b_{n-1}h_{n-1}(z))((\nu - z)h_n(z) + b_{n-1}h_{n-1}(z))}. \end{aligned}$$

Recall that for the canonical solutions the asymptotic relation (3.3) holds. By (4.6) the relation

$$|\Omega_w(z) - \Omega_\nu(z)| = o\left(\frac{1}{|z|^{2n+1}}\right)$$

holds for $z \rightarrow \infty$ uniformly in any angle $\delta \leq \arg(z) \leq \pi - \delta$, $0 < \delta < \pi$ if and only if

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{w(z)}{z} = 0 \tag{4.7}$$

uniformly inside any such angle. Hence for $\Omega_w(z)$ the asymptotic relation holds if and only if $w(z)$ satisfies the condition (4.7). Denote by \mathbb{N}_0 the subset of Nevanlinna functions in the upper half-plane, which satisfy the condition (4.7). The obtained results can be summarized in the following theorem.

Theorem 4.1. *The Nevanlinna formula*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-t} d\sigma_w(t) &= \frac{b_{n-1}k_{n-1}(z) - (z+w(z))k_n(z)}{b_{n-1}h_{n-1}(z) - (z+w(z))h_n(z)} \\ &= \frac{k_{n+1}(z) + \tilde{w}(z)k_n(z)}{h_{n+1}(z) + \tilde{w}(z)h_n(z)}, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\tilde{w}(z) = \frac{\hat{a}_n + w(z)}{b_n}, \tag{4.9}$$

establishes in the non-degenerate case the one-to-one correspondence between the set of Nevanlinna functions $w(z) \in \mathbb{N}_0$ and the set of all solutions of the truncated Hamburger moment problem.

Acknowledgment. We are grateful to V. M. Adamjan for his valuable aid. The authors also thank the referee for the suggestions which lead to a significant improvement of the text.

References

- [1] Adamyan, V. M. and Tkachenko, I. M., *High-frequency electrical conductivity of a collisional plasma*, High Temp. (USA) **21**, (1983), 307.
- [2] Akhiezer, N. I., *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*, Hafner Publishing Company, New York, 1965.
- [3] Akhiezer, N. I. and Glazman, I. M., *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*, Frederick Ungar Publishing Company, New York, 1963, Vol II, § 59.
- [4] Curto, R. E. and Fialkow, L. A., *Recursiveness, positivity, and truncated moment problems*, Houston J. Math. **17** (1991), 603; see also: Curto, R. E. and Fialkow, L. A., *Solutions of the Truncated Moment Problem*, Mem. Amer. Math. Soc. **119** (1996).
- [5] Hamburger, H., *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems*, Math. Ann. **81** (1920), 235; *ibid*, **82** (1921), 120; *ibid*, **82** (1921), 168.
- [6] Jones, W. B., Njåstad, O., Thron, W. J., *Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 113–152.
- [7] Krein, M. G., *The theory of extensions of semibounded Hermitian operators and its applications* (in Russian), Mat. Sb. **20** (1947), 431–495.
- [8] M.G. Krein, *The description of all solutions of the truncated power moment problem and some problems of operator theory*, Mat. Issled. **2**(2) (1967), 114–132; English translation, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **95** (1970), 219–234.
- [9] Krein, M. G., Nudel'man, A. A., *The Markov Moment Problem and Extremal Problems*, Transl. Math. Monographs **50** (1977), Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [10] Landau, H. J. (Ed.), *Moments in Mathematics*, Proc. Sympos. Appl. Math. **37** (1987), Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [11] Ortner, J., Rylyuk, V. M., Tkachenko, I. M., *Reflectivity of cold magnetized plasmas*, Phys. Rev. E **50** (1994), 4937.
- [12] Shohat, J. A., Tamarkin, J. D., *The Problem of Moments*, Math. Surveys Monographs **1** (1943), Amer. Math. Soc., Providence, RI, (4th Ed. 1970).
- [13] Stieltjes, T. J., *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **8** (1894), J76–J122; *ibid*, **9** (1895), A5–A47.

M. URREA
 DEPARTMENT OF APPLIED
 MATHEMATICS
 ETSII, POLYTECHNIC UNIVERSITY
 E-46071 VALENCIA
 SPAIN
 EMAIL: MURREA@MAT.UPV.ES

I. M. TKACHENKO
 DEPARTMENT OF APPLIED
 MATHEMATICS
 ETSII, POLYTECHNIC UNIVERSITY
 E-46071 VALENCIA
 SPAIN

P. FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA
DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS
ETSII, POLYTECHNIC UNIVERSITY
E-46071 VALENCIA
SPAIN